

Synthèse des Travaux de Recherche

Présentée pour l'obtention de

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

(Spécialité : Mathématiques)

“De la Quantification Équivariante aux Algèbres d'Opérateurs”

et

“Espaces Noncommutatifs Semi-finis et Localement Compacts”

par

Victor Gayral

Soutenue le 9 juillet 2015

RAPPORTEURS

Moulay Benameur (Université de Montpellier 2)

Sergey Neshveyev (University of Oslo)

Marc Rieffel (University of California, Berkeley)

JURY

Thierry Fack (Université Lyon 1)

Christian Le Merdy (Université de Franche-Comté)

Hervé Oyono-Oyono (Université de Lorraine)

Michael Pevzner (Université Reims Champagne-Ardenne)

Georges Skandalis (Université Paris Diderot)

Remerciements

Mes premiers remerciements sont destinés à Moulay Benameur, Sergey Neshveyev et Marc Rieffel qui, en plus de m'avoir fait le grand honneur de porter une appréciation sur cette synthèse, ont rendu cette soutenance possible à cette date en s'acquittant de leur tâche en très peu de temps.

Je voudrais aussi exprimer ici ma profonde gratitude à l'égard de Thierry Fack, Christian Le Merdy, Hervé Oyono-Oyono, Michael Pevzner et Georges Skandalis qui m'ont fait le grand honneur et le grand plaisir de participer au jury de mon habilitation.

La majeure partie des résultats présentés ici ont été obtenus en collaboration avec de grands amis auprès de qui j'ai beaucoup appris. C'est avec grand plaisir que je remercie Pierre Bieliavsky, Alan Carey, Adam Rennie et Fedor Sukochev pour tous les moments que nous avons passés ensemble.

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements aux collègues du département MMI de l'URCA, tout particulièrement à Emmanuel Pedon et à Valentin Ovsienko.

J'en profite aussi pour remercier Christelle Marion ainsi que tous les autres personnels administratifs du département.

Enfin, mes derniers remerciements, je les destine à ma compagne Élise et à nos enfants Nora et Nils.

Résumé

Ce mémoire est la synthèse de travaux effectués après ma thèse. Comme son titre l'indique, il comporte deux parties. Bien qu'indépendantes, elles ont comme point commun de répondre à des questions liées à la non compacité en géométrie noncommutative.

La première partie porte sur les applications de la quantification équivariante aux algèbres d'opérateurs et repose sur des travaux en collaboration principalement avec Pierre Bieliavsky. Se donnant une quantification G -équivariante sur un groupe localement compact G , il y a sous certaines conditions analytiques un moyen pour obtenir une théorie des déformations des C^* -algèbres munies d'une action de G . Cette construction généralise celle associée à la quantification de Weyl pour les actions de \mathbb{R}^{2d} développée par Rieffel. À une telle quantification est aussi associée un candidat pour un 2-cocycle unitaire dual sur G . En utilisant les travaux récents de De Commer, on peut déformer le groupe G en un groupe quantique localement compact. Après en avoir exposé les grandes lignes, nous verrons comment réaliser ce programme pour les groupes Kählériens de courbure négative. Cette construction repose sur une généralisation du calcul pseudo-différentiel de Fuchs introduit par Unterberger. L'avancée majeure est d'avoir obtenu une généralisation non Abélienne de la théorie de Rieffel. Notre construction a aussi permis à Tuset et Neshveyev de construire le premier exemple non trivial d'un 2-cocycle unitaire dual sur un groupe de Lie non Abélien et non compact. Nous verrons finalement une autre extension de la théorie de Rieffel, cette fois-ci dans un cas non Lie, à savoir pour l'action d'un espace vectoriel sur un corps local non Archimédien. Les articles présentés pour l'habilitation et qui concernent cette partie sont [8, 9, 39, 41].

La deuxième partie porte sur la géométrie des espaces noncommutatifs semi-finis et localement compacts. Elle repose sur des travaux en collaboration principalement avec Alan Carey, Adam Rennie et Fedor Sukochev. Le premier chapitre concerne la théorie de l'intégration pour les triplets spectraux semi-finis et sans unité. L'objectif principal est de relier les traces de Dixmier aux fonctions ζ et aux semi-groupes de la chaleur d'opérateurs de type Dirac qui ne sont pas à résolvante τ -compacte mais seulement à résolvante localisée τ -compacte. Dans le cas (p, ∞) -sommable, c'est-à-dire dans le cas des traces de Dixmier associées à la divergence logarithmique, nous obtenons une réponse complètement satisfaisante. Dans le cas des traces de Dixmier associées à une divergence quelconque, nous obtenons une réponse restreinte au cas compact mais qui exhibe une relation très forte entre les espaces de Marcinkiewicz d'opérateurs et une théorie d'extrapolation des espaces L^p noncommutatifs. Comme application nous montrons que la trace de Dixmier d'un opérateur pseudo-différentiel d'Hörmander-Weyl sur \mathbb{R}^n coïncide avec l'intégrale de Dixmier de son symbole. Le deuxième chapitre concerne la théorie de l'indice (au sens de Brauer-Fredholm) pour les triplets spectraux semi-finis et sans unité. Après avoir associé à tout triplet spectral semi-fini et sans unité un problème de l'indice numérique, nous obtenons une formule locale de l'indice du type Connes-Moscovici. C'est le résultat principal de ce chapitre. Une des applications de cette formule locale est un théorème du type Atiyah-Singer pour les variétés Riemanniennes à géométrie bornée. Cette formule nous permet aussi de retrouver le théorème de l'indice de Philipps-Raeburn dans le cas d'une action de la droite réelle sur une C^* -algèbre munie d'une trace invariante. Les articles présentés pour l'habilitation et qui concernent cette partie sont [16–18, 43, 44].

Liste des articles présentés pour l'habilitation

- P. Bieliavsky and V. Gayral, “Deformation quantization for actions of Kählerian Lie groups”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **236** Number 1115 (2015).
- P. Bieliavsky, V. Gayral, A. de Goursac and F. Spinnler, “Harmonic analysis on homogeneous complex bounded domains and noncommutative geometry”, in *Current Developments and Retrospectives in Lie Theory: Geometric and Analytical Methods* (editors: G. Mason, I. Penkov, J. A. Wolf), Springer 2014.
- A. Carey, V. Gayral, A. Rennie and F. Sukochev, “Integration on locally compact noncommutative spaces”, *J. Funct. Anal.*, **263** (2012), 383–414.
- A. Carey, V. Gayral, A. Rennie and F. Sukochev, “Index theory for locally compact noncommutative geometries”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **231** Number 1085 (2014).
- A. Carey, V. Gayral, J. Phillips, A. Rennie and F. Sukochev, “Spectral flow for nonunital spectral triples”, *Canad. J. Math.*, **67** (2015), 759–794.
- V. Gayral, J. Gracia-Bondía and J. Várilly, “Fourier analysis on the affine group, quantization and noncompact Connes geometries”, *J. Noncommut. Geom.*, **2** (2008), 215–261.
- V. Gayral and D. Jondreville, “Deformation quantization for actions of \mathbb{Q}_p^d ”, *J. Funct. Anal.*, **268** (2015), 3357–3403.
- V. Gayral and F. Sukochev, “Dixmier traces and extrapolation description of noncommutative Lorentz spaces”, *J. Funct. Anal.*, **266** (2014), 6256–6317.
- V. Gayral and R. Wulkenhaar, “Spectral geometry of the Moyal plane with harmonic propagation”, *J. Noncommut. Geom.*, **7** (2013), 939–979.

Table des matières

I	Quantification équivariante et algèbres d'opérateurs	3
1	Introduction	5
2	Généralités	9
2.1	Quantification équivariante	9
2.2	Déformation des C^* -algèbres	11
2.2.1	Contexte	11
2.2.2	Intégrales oscillantes	11
2.2.3	Inégalité de Calderón-Vaillancourt	12
2.3	Groupes quantiques	14
3	Groupes Kählériens de courbure négative	17
3.1	Structures géométriques	17
3.2	Quantification des groupes Kählériens	21
3.2.1	Cas des groupes élémentaires	21
3.2.2	Cas général	23
3.3	Intégrales oscillantes	25
3.4	Déformation des algèbres de Fréchet	30
3.5	Déformation des C^* -algèbres	32
3.6	Propriétés de la déformation	36
3.7	Groupes Kählériens quantiques	38
4	Groupes Abéliens p-adiques	39
4.1	Le calcul de Weyl p -adique	39
4.2	Déformations des C^* -algèbres	41
II	Espaces Noncommutatifs Semi-finis non Compacts	45
5	Introduction	47
6	Théorie de l'intégration	51
6.1	Notations et généralités	51
6.1.1	Espaces de Marcinkiewicz d'opérateurs	51
6.1.2	Traces de Dixmier semi-finies	52
6.1.3	Triplets spectraux semi-finis	53
6.1.4	L'intégrale noncommutative	54

6.2	Cas localement compact et \mathcal{M}_{\log}^p -sommable	56
6.3	Cas localement compact et \mathcal{M}_{ψ}^p -sommable	58
6.3.1	Positionnement du problème	58
6.3.2	Une méthode d'extrapolation	59
6.3.3	Traces de Dixmier et fonctions ζ	61
6.3.4	Traces de Dixmier et semi-groupe de la chaleur	63
6.3.5	Application aux opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^n	64
7	Théorie de l'indice	67
7.1	Le problème de l'indice	67
7.1.1	L'application indice en KK -théorie	67
7.1.2	L'application indice numérique	68
7.2	Un calcul pseudo-différentiel adapté	70
7.3	Une formule locale de l'indice	72
7.3.1	Une formule du type McKean-Singer	75
7.3.2	Une formule de flot spectral	76
7.4	Applications aux variétés à géométrie bornée	77
7.4.1	Un théorème d'Atiyah-Singer	77
7.4.2	Le cas des revêtements	79
7.5	Des exemples noncommutatifs	80
7.5.1	Plan de Moyal	80
7.5.2	Le Théorème de l'indice de Phillips-Raeburn	82

Première partie

Quantification équivariante et
algèbres d'opérateurs

Chapitre 1

Introduction

Dans sa formulation dans le langage des algèbres d'opérateurs, la quantification équivariante possède des connections naturelles avec la théorie des déformations des C^* -algèbres et avec celle des groupes quantiques localement compacts. Les premières relations entre quantifications, déformations et groupes quantiques ont été établies par Rieffel dans [80] et [82]. Plus précisément, Rieffel montra dans [80] qu'à partir de la formule de composition des symboles dans le calcul pseudo-différentiel de Weyl :

$$f_1 \star_{\theta} f_2 := \int_{\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i}{\theta} \omega(x_1, x_2)} \tau_{x_1}(f_1) \tau_{x_2}(f_2) dx_1 dx_2, \quad \theta \in \mathbb{R}^*, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}),$$

(ω est la forme symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$ et τ est l'action régulière) on peut munir l'algèbre de Fréchet A^∞ des vecteurs lisses d'une C^* -algèbre A pour une action continue α de \mathbb{R}^{2n} , d'une nouvelle loi associative :

$$a \star_{\theta}^{\alpha} b := \int_{\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i}{\theta} \omega(x_1, x_2)} \alpha_{x_1}(a) \alpha_{x_2}(b) dx_1 dx_2, \quad \theta \in \mathbb{R}^*, \quad a, b \in A^\infty. \quad (1.0.1)$$

L'algèbre de Fréchet déformée $(A^\infty, \star_{\theta}^{\alpha})$ s'injecte naturellement dans une C^* -algèbre, donnant in fine une théorie des déformations pour les C^* -algèbres munies d'une action de \mathbb{R}^{2n} . Concernant la relation entre quantification et groupes quantiques, Rieffel montra dans [82] que sa construction appliquée à la C^* -algèbre commutative $C_0(G)$ d'un groupe topologique localement compact G possédant un sous-groupe fermé isomorphe à \mathbb{R}^{2d} et à l'action $\rho \otimes \lambda$ de $\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d}$ produit naturellement une classe d'exemples de groupes quantiques localement compacts dans le cadre des C^* -algèbres.

Il existe une autre approche à la quantification, due à Landstad et Raeburn [60–63], elle aussi très directement liée aux groupes quantiques. Au niveau conceptuel, leur point de départ est que $C^*(G, \omega)$, la C^* -algèbre (réduite) d'un groupe G twistée par un 2-cocycle unitaire ω , devrait être considérée comme la quantification du groupe dual virtuel. Cette approche à la quantification a été développée par la suite par Kasprzak [55] qui a construit une théorie des déformations pour les C^* -algèbres munies d'une action continue d'un groupe Abélien localement compact quelconque, à partir d'un 2-cocycle unitaire sur le groupe dual. Un peu plus tard, Bhowmick, Neshveyev et Sangha [6] ont observé que la construction de Kasprzak restait valable pour les actions de groupes non Abélien à la condition que le 2-cocycle unitaire soit choisi dans le groupe quantique dual, c'est-à-dire dans l'algèbre de von Neumann du groupe. Un point important ici est que lorsque

le groupe est non Abélien les symétries de la C^* -algèbre sont aussi déformées : ce n'est plus le groupe qui agit sur la déformation mais une version quantique de celui-ci. Tout ceci suggère que les groupes quantiques sont naturellement présents dans le contexte des quantifications équivariantes et dans celui des théories des déformations des C^* -algèbres qui leur sont associées.

Plus récemment, Neshveyev et Tuset ont donné une formidable clarification du rôle que jouent les groupes quantiques dans les déformations [70] en construisant ce que l'on peut considérer comme la théorie la plus générale possible dans ce context : celle des déformations des C^* -algèbres munies de l'action d'un groupe quantique (au sens des algèbres de von Neumann [58, 59]) et d'un 2-cocycle unitaire dual sur ce dernier. Leur approche généralise toutes celles mentionnées plus haut et leur point de départ repose sur les travaux De Commer [30]. Ces derniers montrent que se donnant un groupe quantique localement compact (\mathbb{G}, Δ) ainsi qu'un 2-cocycle unitaire dual, c'est-à-dire un unitaire F de $L^\infty(\hat{\mathbb{G}}) \otimes L^\infty(\hat{\mathbb{G}})$ (avec $(\hat{\mathbb{G}}, \hat{\Delta})$ le groupe quantique dual, qui satisfait à la relation de cocyclicité :

$$(F \otimes 1)(\hat{\Delta} \otimes \text{Id})(F) = (1 \otimes F)(\text{Id} \otimes \hat{\Delta})(F),$$

alors $(\hat{\mathbb{G}}, F\hat{\Delta}(\cdot)F^*)$ peut lui aussi être muni d'une structure de groupe quantique localement compact. Le groupe quantique dual, noté (\mathbb{G}_F, Δ) , est alors vu comme une déformation de (\mathbb{G}, Δ) .

Cependant, déjà lorsque $\mathbb{G} = G$ est un groupe ordinaire non Abélien, la construction d'un 2-cocycle dual unitaire non trivial est une question extrêmement difficile. Dans [70], le seul exemple donné est celui naturellement attaché à la quantification équivariante sur tout groupe Kählérien de courbure sectionnelle négative que nous avons construit dans [8]. Le programme que nous sommes en train de développer consiste à construire des quantifications équivariantes non formelles sur des groupes localement compacts (le cas des groupes compacts n'a aucun intérêt ici) afin d'obtenir des théories des déformations de C^* -algèbres ainsi que des exemples explicites de groupes quantiques localement compacts via la construction d'un 2-cocycle unitaire dual.

Mes contributions à la théorie des déformations des C^* -algèbres et aux groupes quantiques localement compacts du point de vue de la quantification équivariante sont issues de collaborations récentes avec Pierre Bieliavsky, José Gracia-Bondía et Joseph Várilly [8, 9, 39, 41].

Au chapitre 2, nous présentons les grandes lignes du programme mentionné plus haut. Nous ne cherchons pas ici à formuler des résultats généraux car d'une part la listes des hypothèses nécessaires serait considérablement longue et d'autre part ce que nous cherchons précisément à faire c'est à construire des exemples concrets. Concernant les groupes quantiques localement compacts, cette motivation nous semble largement suffisante, étant donné le très petit nombre d'exemples connus. La stratégie globale est la suivante : À une quantification G -équivariante et non formelle sur un groupe localement compact G , on attache un noyau distributionnel sur $G \times G$. Celui-ci donne un candidat naturel pour une théorie des déformations pour les C^* -algèbres munies d'une action continue de G et aussi un candidat pour un 2-cocycle unitaire dual sur G . Du point de vue technique, nos méthodes reposent essentiellement sur la construction d'intégrales oscillantes à partir de la phase du noyau à deux points ainsi que sur l'obtention d'inégalités de type Calderón-Vaillancourt.

Le chapitre 3 traite le cas des groupes Kählériens de courbure négative et constitue principalement une synthèse des résultats obtenus en collaboration avec Pierre Bieliavsky [8]. Depuis les travaux de Pyatetskii-Shapiro [77], on sait que tout groupe de Lie Kählérien de courbure sectionnelle négative se décompose en produits semi-directs de blocs élémentaires isomorphes à la composante d'Iwasawa AN du groupe $SU(1, n) = ANK$. Depuis les travaux de Bieliavsky [7, 10], on sait aussi construire une quantification non formelle sur tout groupe Kählérien de courbure négative mais dans un cadre analytique relativement éloigné de celui des algèbres d'opérateurs. La première partie de ce chapitre consiste précisément à réinterpréter cette quantification dans le cadre des algèbres d'opérateurs. Le point de départ de notre construction est une généralisation du calcul pseudo-différentiel de Fuchs, initialement développé par Unterberger [89] dans le cas de plus basse dimension, c'est-à-dire dans le cas du groupe affine de la droite réelle. Cette quantification repose sur la structure d'espace symplectique symétrique polarisé que possède chaque bloc élémentaire. Le noyau à deux points reflète cette structure : sa phase au point $(g, h) \in G \times G$ est donnée par l'aire symplectique du triangle géodésique dont les points milieux sont $(e, g, h) \in G^3$ et son amplitude est donnée par la racine du Jacobien de l'application triangle médian associée. Après avoir identifié une "structure tempérée" sur ces groupes, nous construisons une intégrale oscillante sur des espaces de fonctions régulières au comportement contrôlé à l'infini. De cette construction résulte une théorie des déformations pour les C^* -algèbres munies d'une action continue d'un groupe de Lie Kählérien de courbure sectionnelle négative.

Au chapitre 4, nous généralisons la construction de Rieffel dans un cadre Abélien mais non Lie. Ce chapitre constitue principalement une synthèse des résultats obtenus avec mon étudiant en thèse David Jondreville dans [41]. Les groupes que nous considérons sont de la forme $G = \mathbf{k}^{2d}$, avec \mathbf{k} un corps local non Archimédien de caractéristique différente de 2. Ces groupes étant Abélien, cette situation est en quelque sorte déjà couverte par la construction de Kasprzak. Cela dit, notre construction est importante pour tester le réalisme de notre programme au delà des groupes de Lie. Un de nos résultats est d'ailleurs l'équivalence entre ces deux constructions.

Chapitre 2

Généralités

2.1 Quantification équivariante

Commençons par définir ce que nous entendons par quantification équivariante non formelle dans son contexte naturel qui est celui de la géométrie symplectique. Pour cela, considérons (M, ω) une variété symplectique, \tilde{G} un sous-groupe de Lie du groupe des symplectomorphismes de M et (π, \mathcal{H}_π) une représentation unitaire irréductible et projective de \tilde{G} .

Définition 2.1.1. *Une quantification non perturbative et \tilde{G} -équivariante de M est une application linéaire continue*

$$\Omega : C_c^\infty(M) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi),$$

satisfaisant à la propriété de covariance :

$$\pi(g) \Omega(f) \pi(g)^* = \Omega(f^g), \quad f^g := [x \in M \mapsto f(g^{-1}.x)],$$

Remarque 2.1.2. Cette définition se veut être la plus générale possible, en particulier on ne demande aucune condition sur l'existence d'une limite semi-classique. D'ailleurs, le seul paramètre de déformation présent ici est la représentation π elle-même.

Il existe un paradigme de quantifications équivariantes, celui de la quantification de Moyal-Stratonowich. Cette quantification est associée à une famille d'opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H}_π , $\{\Omega(x)\}_{x \in M}$, satisfaisant à la propriété de covariance $\pi(g) \Omega(x) \pi(g)^* = \Omega(g.x)$ et est donnée par :

$$\Omega(f) := \int_M f(x) \Omega(x) d\mu(x),$$

où $d\mu$ est la mesure de Liouville sur M . Notons que la plupart des quantifications connues sont de cette forme : la quantification de Weyl, celle de Berezin, les quantifications par états Cohérents, les calculs de Fuchs et de Bessel d'Unterberger, la quantification Baker-Campbell-Hausdorff des groupes de Lie exponentiels...

Pour relier la quantification aux déformations et aux groupes quantiques, il faut plus d'hypothèses. Supposons qu'il existe G , un sous-groupe de \tilde{G} , qui agisse simplement transitivement sur M . Sous l'identification $G \simeq M$, G devient un groupe de Lie muni d'une structure symplectique invariante par translations à gauche, la mesure de Liouville $d\mu$

devient une mesure de Haar à gauche sur G et les quantificateurs $\Omega(x)$, $x \in M$, prennent une forme extrêmement simple :

$$\Omega(g) = \pi(g) \Omega(e) \pi(g)^*, \quad g \in G.$$

Ainsi, en posant $\Sigma := \Omega(e)$, on voit que toute quantification de Moyal-Stratonowich G -équivariante à gauche sur un groupe de Lie symplectique G est associée à une représentation unitaire, irréductible et projective π de G , ainsi qu'à un opérateur auto-adjoint Σ sur \mathcal{H}_π , par la formule

$$\mathbf{\Omega}_{\pi, \Sigma}(f) := \int_G f(g) \pi(g) \Sigma \pi(g)^* d^\lambda(g). \quad (2.1.1)$$

Ce qui est particulièrement intéressant avec cette formule, c'est que tout rapport avec la géométrie symplectique a disparu du paysage. On peut donc s'en servir comme un ansatz pour construire une quantification G -équivariante sur un groupe topologique arbitraire G .

Considérons donc maintenant un groupe localement compact G (séparable et dénombrable à l'infini), (π, \mathcal{H}_π) une représentation unitaire irréductible et projective de G et Σ un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H}_π . Dans ce cadre $C_c^\infty(G)$ peut être défini comme étant l'espace des fonctions tests au sens de Bruhat [15]. On peut alors construire la quantification $\mathbf{\Omega}_{\pi, \Sigma}$ sur G , par la formule (2.1.1). Pour aller plus loin on fera l'hypothèse supplémentaire que la quantification $\mathbf{\Omega}_{\pi, \Sigma}$ s'étend en un opérateur unitaire de l'espace de Hilbert $L_\lambda^2(G)$ vers l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur \mathcal{H}_π :

$$\mathbf{\Omega}_{\pi, \Sigma} \in \mathcal{U}\left(L_\lambda^2(G), \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_\pi)\right).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, on parle de quantification unitaire. La condition d'unitarité est naturelle au sens où elle est vérifiée dans la plupart des exemples et lorsqu'elle ne l'est pas, il est bien souvent possible de modifier légèrement l'opérateur Σ de telle sorte qu'elle le devienne : la plupart des quantifications sont unitarisables. Cependant, il y a un prix à payer dans le processus d'unitarisation : le nouvel opérateur Σ est toujours auto-adjoint mais est seulement densément défini. Pour plus de clarté, nous allons ignorer cette subtilité dans cette discussion générale, mais nous y reviendrons dans les exemples. Notons aussi que lorsque G n'est pas fini, pour qu'une quantification soit unitaire il est nécessaire que \mathcal{H}_π soit de dimension infinie et donc il est nécessaire que le groupe G soit non compact.

Pour une quantification unitaire, l'espace $L_\lambda^2(G)$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre Hilbertienne unimodulaire en posant

$$\star_{\pi, \Sigma} : L_\lambda^2(G) \times L_\lambda^2(G) \rightarrow L_\lambda^2(G), \quad (f_1, f_2) \mapsto \mathbf{\Omega}_{\pi, \Sigma}^*\left(\mathbf{\Omega}_{\pi, \Sigma}(f_1) \mathbf{\Omega}_{\pi, \Sigma}(f_2)\right).$$

Il est facile de voir que le produit $\star_{\pi, \Sigma}$ est associé à une distribution au sens de Bruhat $K_{\pi, \Sigma}$ sur G^3 , par la formule

$$f_1 \star_{\pi, \Sigma} f_2(g_0) = \int_{G \times G} K_{\pi, \Sigma}(g_0, g_1, g_2) f_1(g_1) f_2(g_2) d^\lambda(g_1) d^\lambda(g_2), \quad (2.1.2)$$

et que cette distribution est reliée au couple (π, Σ) par la relation distributionnelle :

$$K_{\pi, \Sigma}(g_0, g_1, g_2) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\pi}\left(\Sigma \pi(g_0^{-1} g_1) \Sigma \pi(g_1^{-1} g_2) \Sigma \pi(g_2^{-1} g_0)\right).$$

En particulier, le noyau $K_{\pi,\Sigma}$ est toujours calculable. Notons aussi que par invariance à gauche, on a

$$K_{\pi,\Sigma}(g_0, g_1, g_2) = \mathbf{K}_{\pi,\Sigma}(g_0^{-1}g_1, g_0^{-1}g_2),$$

où $\mathbf{K}_{\pi,\Sigma}$ est le noyau à deux points donné par

$$\mathbf{K}_{\pi,\Sigma}(g_1, g_2) := K_{\pi,\Sigma}(e, g_1, g_2).$$

Dans les exemples, le noyau $\mathbf{K}_{\pi,\Sigma}$ n'est pas singulier mais au contraire est une fonction régulière sur $G \times G$. Pour simplifier la discussion, nous supposons que c'est le cas en général. Ainsi, en notant ρ la représentation régulière droite, la formule (2.1.2) peut se réécrire comme la relation fonctionnelle :

$$f_1 \star_{\pi,\Sigma} f_2 = \int_{G \times G} \mathbf{K}_{\pi,\Sigma}(g_1, g_2) \rho_{g_1}(f_1) \rho_{g_2}(f_2) d^\lambda(g_1) d^\lambda(g_2). \quad (2.1.3)$$

2.2 Applications aux déformations des C^* -algèbres

2.2.1 Contexte

La première application de la quantification équivariante aux algèbres d'opérateurs concerne la construction d'une théorie des déformations des C^* -algèbres munies d'une action de groupe.

Soit $\Omega_{\pi,\Sigma}$ une quantification G -équivariante et unitaire sur G et soit $\mathbf{K}_{\pi,\Sigma} = A_{\pi,\Sigma} e^{iS_{\pi,\Sigma}}$ le noyau à deux points associé. Se donnant A une C^* -algèbre et α une action continue de G sur A , par analogie avec la formule (2.1.3), on voudrait munir A d'une nouvelle structure de C^* -algèbre en modifiant sa multiplication par la relation :

$$a \star_{\pi,\Sigma}^\alpha b = \int_{G \times G} \mathbf{K}_{\pi,\Sigma}(g_1, g_2) \alpha_{g_1}(a) \alpha_{g_2}(b) d^\lambda(g_1) d^\lambda(g_2), \quad a, b \in A.$$

En général, les intégrales apparaissant dans cette formule ne sont pas définies. En effet, l'application $[g \mapsto \alpha_g(a)]$ est constante en norme et $\mathbf{K}_{\pi,\Sigma}$ est, dans le cas générique d'un groupe non unimodulaire, typiquement non borné. Notre approche à la déformation repose sur deux étapes. La première consiste à trouver une sous-algèbre de Fréchet A_{reg} de A , qui soit dense et stable par α , et sur laquelle on puisse donner du sens au produit déformé $\star_{\pi,\Sigma}^\alpha$. La deuxième étape consiste à plonger l'algèbre de Fréchet déformée $(A_{\text{reg}}, \star_{\pi,\Sigma}^\alpha)$ dans une C^* -algèbre ambiante B . On appellera C^* -déformation de A l'adhérence de l'image de A_{reg} dans B .

2.2.2 Intégrales oscillantes

Pour être un peu plus précis concernant la première étape, ce que l'on cherche c'est un couple $(A_{\text{reg}}, \mathbf{D})$, où A_{reg} est comme ci-dessus et $\mathbf{D} := \{\mathbf{D}_j\}_{j \in J}$ est une famille dénombrable d'opérateurs sur $C^\infty(G \times G)$, famille indicée par le même ensemble que celui qui indice la famille de semi-normes $\{\|\cdot\|_j\}_{j \in J}$ définissant la topologie de A_{reg} . En posant ensuite

$$\alpha(a, b) := [(x, y) \mapsto \alpha_x(a) \alpha_y(b)] \in C_b(G \times G, A_{\text{reg}}), \quad a, b \in A_{\text{reg}}, \quad (2.2.1)$$

et en définissant A_j comme l'espace semi-normé $(A_{\text{reg}}, \|\cdot\|_j)$, ce que l'on demande au couple $(A_{\text{reg}}, \mathbf{D})$ c'est d'être tel que :

$$\mathbf{D}_j (A_{\pi, \Sigma} \alpha(a, b)) \in L^1_\lambda(G \times G, A_j), \quad \forall a, b \in A_{\text{reg}}, \quad \forall j \in J, \quad (2.2.2)$$

et, en notant \mathbf{D}_j^* l'adjoint formel de \mathbf{D}_j , tel que

$$\mathbf{D}_j^* \exp\{iS_{\pi, \Sigma}\} = \exp\{iS_{\pi, \Sigma}\}, \quad \forall j \in J. \quad (2.2.3)$$

Lorsqu'un tel couple existe, il y a un moyen évident de donner du sens à $\star_{\pi, \Sigma}^\alpha$ sur A_{reg} , à savoir par l'intégrale absolument convergente pour chaque semi-norme $\|\cdot\|_j$:

$$a \star_\theta^\alpha b := \int_{G \times G} \exp\{iS_{\pi, \Sigma}\} \mathbf{D}_j (A_{\pi, \Sigma} \alpha(a, b)), \quad \forall a, b \in A_{\text{reg}}, \quad \forall j \in J.$$

Lorsque ces conditions sont satisfaites, $(A_{\text{reg}}, \star_\theta^\alpha)$ devient une algèbre de Fréchet que nous appelons la déformation de Fréchet de la C^* -algèbre A associée à l'action α de G . Lorsque G est groupe de Lie, il y a un candidat naturel pour A_{reg} , à savoir A^∞ la sous-algèbre des vecteurs lisse pour l'action α :

$$A^\infty := \{a \in A : [g \mapsto \alpha_g(a)] \in C^\infty(G, A)\}. \quad (2.2.4)$$

Remarque 2.2.1. Lorsque G n'est pas un groupe de Lie, on peut toujours considérer l'espace des vecteurs lisses au sens de Bruhat (tel qu'il a été construit par Ralf Meyer [69]). Cet espace n'étant pas en général un espace de Fréchet, cela nous conduirait à alourdir inutilement la théorie. Par contre, l'existence d'un théorème de factorisation à la Dixmier-Malliavin pour cet espace (voir [69]) en fait un outil intermédiaire fort utile (en particulier pour traiter de questions de densité).

2.2.3 Inégalité de Calderón-Vaillancourt

Pour plonger $(A_{\text{reg}}, \star_\theta^\alpha)$ dans une C^* -algèbre, nous utilisons des méthodes basées sur les états cohérents et les fonctions de Wigner. Nous cherchons à représenter $(A_{\text{reg}}, \star_\theta^\alpha)$ dans $A \otimes_{\min} \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ en donnant du sens à l'application

$$\Omega_\theta^A : a \mapsto \int_G \alpha_g(a) \otimes U_\theta(g) \Sigma U_\theta(g)^* d^\lambda(g), \quad (2.2.5)$$

c'est-à-dire nous cherchons à étendre la quantification $\Omega_{\pi, \Sigma}$ de $L^2_\lambda(G)$ à un espace de fonctions sur G à valeurs dans A , contenant l'espace

$$\alpha(A_{\text{reg}}) := \{[g \mapsto \alpha_g(a)] : a \in A_{\text{reg}}\} \subset C_b(G, A).$$

Dans le cas classique du calcul pseudo-différentiel de Weyl et lorsque $A = \mathbb{C}$, l'existence d'une telle extension est garantie par le Théorème de Calderon-Vaillancourt, qui montre que si un symbole est borné et possède suffisamment de dérivées bornées, alors l'opérateur pseudo-différentiel associé est, lui aussi, borné. C'est cette approche qui a été suivie par Rieffel dans [80] mais dans le contexte de la représentation régulière gauche au lieu de la représentation irréductible de Schrödinger. Dans ce cas où le groupe est \mathbb{R}^{2n} , la méthode

classique pour démontrer un Théorème de Calderon-Vaillancourt (dans les cas des représentations régulière gauche et irréductible et pour $A = \mathbb{C}$ ou A quelconque), repose sur le Lemme de Cotlar. Mais en l'absence de réseaux dans le groupe G , cette méthode ne peut pas être implémentée. À la place, nous utilisons une méthode développée par Unterberger [89] dans les années 80 qui est basée sur les états cohérents et sur les fonctions de Wigner. Pour utiliser cette méthode, il faut que la représentation projective π soit de carré intégrable modulo son centre. En utilisant un résultat de Duflo et Moore [35], généralisé par Aniello [2] pour les représentations projectives, et en appelant d_π l'opérateur de dimension formelle de la représentation π , pour tout vecteur non nul η dans le domaine de $d_\pi^{-1/2}$, on a une résolution faible de l'identité sur \mathcal{H}_π :

$$\int_G |\pi(g)\eta\rangle\langle\pi(g)\eta| d^\lambda(g) = \|d_\pi^{-1/2}\eta\|^2 \text{Id}_{\mathcal{H}_\pi}.$$

Se donnant maintenant $\phi, \psi \in \mathcal{H}_\pi$, on définit la fonction de Wigner comme l'élément de $L^2_\lambda(G)$ donné par le symbole de l'opérateur de rang 1 $|\psi\rangle\langle\phi| := [\varphi \mapsto \langle\phi, \varphi\rangle\psi]$:

$$W_{\psi, \phi} := \Omega_{\pi, \Sigma}^*(|\psi\rangle\langle\phi|).$$

On montre facilement que les fonctions de Wigner sont reliées aux quantificateurs $\Omega_{\pi, \Sigma}(g)$, $g \in G$ par la relation suivante :

$$W_{\psi, \phi}(g) = \langle\phi, \Omega_{\pi, \Sigma}(g)\psi\rangle,$$

en tout cas lorsque ψ appartient au domaine commun des $\Omega_{\pi, \Sigma}(g)$. Les fonctions de Wigner qui nous intéressent ici sont celles associées à une paire d'états cohérents $(\pi(g)\eta, \pi(g')\eta)$, $g, g' \in G$, avec $\eta \in \text{Dom}(d_\pi^{-1/2})$:

$$W_{g', g''}(g) := \langle\pi(g')\eta, \Omega_{\pi, \Sigma}(g) \pi(g'')\eta\rangle.$$

L'idée est de définir tout d'abord $\Omega_{\pi, \Sigma}(F)$, pour $F : G \rightarrow A$ suffisamment régulière (notion que l'on précisera dans les exemples), au sens faible sur la famille d'états cohérents $\{\pi(g)\eta\}_{g \in G}$, par la formule

$$\langle\pi(g')\eta, \Omega_{\pi, \Sigma}(F) \pi(g'')\eta\rangle := \int_G F(g) W_{g', g''}(g) d^\lambda(g) =: W_{g', g''}(F) \in A,$$

puis, en utilisant deux fois la résolution de l'identité, de définir $\Omega_{\pi, \Sigma}(F)$ comme la forme quadratique sur $\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}$ (avec \mathcal{H} l'espace de Hilbert d'une représentation fidèle A), donnée pour $\Psi, \Phi \in \mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}$, par :

$$\Omega_{\pi, \Sigma}(F)[\Psi, \Phi] := \int_{G \times G} \left\langle \langle\Phi, \pi(g')\eta\rangle_{\mathcal{H}_\pi}, W_{g', g''}(F) \langle\Psi, \pi(g'')\eta\rangle_{\mathcal{H}_\pi} \right\rangle_{\mathcal{H}} d^\lambda(g') d^\lambda(g'').$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}$, on voit qu'une condition suffisante pour que cette forme quadratique soit bornée est que

$$\sup_{g' \in G} \int_G \|W_{g', g''}(F)\|_A d^\lambda(g'') < \infty,$$

et c'est cette inégalité que nous allons démontrer dans les exemples à venir. En tout cas, lorsque cette inégalité est satisfaite, et lorsque l'application

$$\alpha : A \rightarrow C_b(G, A), \quad a \mapsto [g \mapsto \alpha_g(a)],$$

envoie A_{reg} dans les fonctions suffisamment régulières (au sens précédent), alors l'application

$$A_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad a \mapsto \|a\|_{\pi, \Sigma} := \left\| \Omega_{\pi, \Sigma}(\alpha(a)) \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H})},$$

définit une pré- C^* -norme sur l'algèbre de Fréchet déformée $(A_{\text{reg}}, \star_{\pi, \Sigma})$. Sa C^* -complétion forme ce que l'on appelle la C^* -déformation de A pour l'action α .

2.3 Applications aux groupes quantiques

La deuxième application de la quantification équivariante aux algèbres d'opérateurs concerne la construction de groupes quantiques localement compacts.

La notion de groupe quantique localement compact à laquelle nous faisons référence est celle de Kustermans et Vaes [58, 59], dans le cadre mesurable des algèbres de von Neumann. Rappelons que dans ce cadre-là, un groupe quantique \mathbb{G} consiste en la donnée d'un quadruplet $(\mathcal{N}, \Delta, \Phi_\lambda, \Phi_\rho)$, où \mathcal{N} est une algèbre de von Neumann, $\Delta : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{N}$ un coproduit et Φ_λ, Φ_ρ sont des poids normaux, semi-finis et fidèles (NSF) sur \mathcal{N} qui sont de plus invariants respectivement à gauche et à droite. On notera aussi $\widehat{\mathbb{G}} = (\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\Delta}, \widehat{\Phi}_\lambda, \widehat{\Phi}_\rho)$ le groupe quantique Pontriyagin-dual de \mathbb{G} .

Outre le fait que cette théorie soit mesurable et non pas topologique, cette théorie souffre d'un autre problème important : il n'existe qu'un très petit nombre d'exemples. Et c'est pour construire de tels exemples que la quantification équivariante peut s'avérer très utile.

Dans le contexte des déformations formelles, le lien entre la quantification des groupes de Poisson-Lie et les groupes quantiques remonte aux travaux fondateurs de Drinfeld [34]. Dans celui des algèbres d'opérateurs, la première connection entre la quantification équivariante et les groupes quantiques localement compacts est due à Rieffel qui montra comment construire à partir du calcul pseudo-différentiel de Weyl une version C^* -quantique de tout groupe de Lie possédant un sous-groupe fermé isomorphe à \mathbb{R}^{2d} .

La construction d'un groupe quantique localement compacts à partir d'une quantification G -équivariante sur un groupe G , repose sur celle d'un 2-cocycle unitaire dual :

Définition 2.3.1. *Soit $\mathbb{G} = (\mathcal{N}, \Delta, \Phi_\lambda, \Phi_\rho)$ un groupe quantique localement compact. Un 2-cocycle unitaire F sur \mathbb{G} consiste en un élément unitaire de $\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}$ satisfaisant à la relation de 2-cocyclicité :*

$$(F \otimes 1)(\Delta \otimes \text{Id})(F) = (1 \otimes F)(\text{Id} \otimes \Delta)(F) \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{N} \otimes \mathcal{N}.$$

On parlera de 2-cocycle unitaire dual sur \mathbb{G} pour un 2-cocycle unitaire sur le groupe quantique dual $\widehat{\mathbb{G}}$.

Se donnant un 2-cocycle unitaire dual sur \mathbb{G} , on peut évidemment déformer le coproduit de $\widehat{\mathbb{G}}$ tout en gardant ses propriétés de morphisme et de co-associativité, par la formule :

$$\widehat{\Delta}_F = \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{N}, \quad a \mapsto F \widehat{\Delta}(a) F^*.$$

On sait aussi depuis les travaux de De Commer sur les “objets Galois” pour les groupes quantiques localement compacts [30], qu’il existe sur $\widehat{\mathbb{G}}$ deux poids NSF $\widehat{\Phi}_{\lambda,F}$, $\widehat{\Phi}_{\rho,F}$ qui sont invariants à gauche et à droite pour le co-produit déformé $\widehat{\Delta}_F$. On notera $\widehat{\mathbb{G}}_F = (\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\Delta}_F, \widehat{\Phi}_{\lambda,F}, \widehat{\Phi}_{\rho,F})$ le groupe quantique dual déformé ainsi obtenu. En utilisant finalement la dualité de Pontryagin, on définit alors la déformation du groupe quantique direct par :

$$\mathbb{G}_F := \widehat{\widehat{\mathbb{G}}_F} =: (\mathcal{N}_F, \Delta_F, \Phi_{\lambda,F}, \Phi_{\rho,F}).$$

Déjà dans le cas classique d’un groupe non Abélien G , avec $\mathcal{N} = L^\infty(G)$, la construction d’un 2-cocycle unitaire dual $F \in W^*(G \times G)$ n’est en rien évidente. Dans un contexte purement algébrique cela équivaut à construire une déformation associative et équivariante à gauche du produit ordinaire de l’algèbre des fonctions sur G .

Soit $\Omega_{\pi,\Sigma}$ une quantification G -équivariante et unitaire sur un groupe localement compact G et soit $\mathbf{K}_{\pi,\Sigma}$ le noyau à deux points associé. On a alors un candidat naturel pour un 2-cocycle unitaire dual sur G :

$$F_{\pi,\Sigma}^\lambda := \int_{G \times G} \overline{\mathbf{K}_{\pi,\Sigma}(g,h)} \lambda_{g^{-1}} \otimes \lambda_{h^{-1}} d^\lambda(g) d^\lambda(h).$$

Évidemment, rien ne garantit qu’une telle expression soit bien définie car, rappelons-le, $\mathbf{K}_{\pi,\Sigma}$ est typiquement non borné. Rien n’indique non plus quel sens donner à ces intégrales et sur quels domaines il faut travailler. Par contre, si on parvient à montrer l’unitarité, la 2-cocyclicité est alors automatique puisqu’étant équivalente à l’associativité de $\star_{\pi,\Sigma}$ sur $L_\lambda^2(G)$.

Chapitre 3

Groupes Kählériens de courbure négative

3.1 Structures géométriques

Par groupe de Lie Kählérien nous entendons ici un groupe de Lie qui en tant que variété soit muni d'une structure Kählérienne invariante par translations à gauche.

Depuis les travaux de Pyatetskii-Shapiro [77], on sait que tout groupe de Lie Kählérien de courbure sectionnelle négative est de la forme

$$G = \left(\left(\dots \left(\mathbb{S}_d \times \mathbb{S}_{d-1} \right) \times \dots \right) \times \mathbb{S}_2 \right) \times \mathbb{S}_1, \quad (3.1.1)$$

où chaque composante élémentaire \mathbb{S} est isomorphe au facteur AN dans la décomposition d'Iwasawa du groupe de Lie simple $SU(1, n) = ANK$. En particulier, tout groupe de Lie Kählérien de courbure négative est non unimodulaire, résoluble et exponentiel (i.e. l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est un difféomorphisme global). La structure Kählérienne associée à chaque groupe élémentaire \mathbb{S} vient de celle de l'espace Hermittien symétrique $SU(1, n)/U(n)$ transportée via l'isomorphisme (\mathbb{S} -équivariant à gauche) d'Iwasawa $SU(1, n)/U(n) \simeq \mathbb{S}$. Rappelons aussi la structure de l'algèbre de Lie \mathfrak{s} d'un groupe élémentaire \mathbb{S} . Soit (V, ϖ) un espace vectoriel symplectique et soit \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de Heisenberg associée : \mathfrak{h} est engendrée par V et par un élément central E , sa table est donnée par $[v_1, v_2] = \varpi(v_1, v_2) E$, $v_1, v_2 \in V$. L'algèbre de Lie \mathfrak{s} est alors associée à l'extension scindée :

$$0 \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{s} := \mathfrak{a} \times_{\rho_{\mathfrak{h}}} \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow 0,$$

où $\mathfrak{a} := \mathbb{R}H$ et l'homomorphisme d'extension $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{a} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{h})$ est donné par :

$$\rho_{\mathfrak{h}}(H)(v + tE) := [H, v + tE] := v + 2tE, \quad v \in V, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1.2)$$

En dimension deux, c'est-à-dire lorsque $V = \{0\}$, le groupe \mathbb{S} est isomorphe à la composante connexe au neutre du groupe affine de la droite réelle. Dans le système de coordonnées d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{S}, \quad aH + v + tE \mapsto \exp\{tH\} \exp\{v + tE\}. \quad (3.1.3)$$

la multiplication du groupe \mathbb{S} devient :

$$(a, v, t) \cdot (a', v', t') = \left(a + a', e^{-a'} v + v', e^{-2a'} t + t' + \frac{1}{2} e^{-a'} \varpi(v, v') \right). \quad (3.1.4)$$

Dans ce système de coordonnées, la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{s} est une mesure de Haar à gauche sur \mathbb{S} et que la fonction modulaire vaut $\Delta_{\mathbb{S}}(a, v, t) = e^{2(n+1)a}$.

Mentionnons aussi une autre décomposition canoniquement attachée à un groupe élémentaire \mathbb{S} , décomposition qui permettra le moment venu de définir une polarisation globale sur \mathbb{S} . Soit $\mathfrak{l}^* \oplus \mathfrak{l}$ une décomposition de l'espace vectoriel symplectique (V, ϖ) en une somme directe de deux sous-espaces Lagrangiens en dualité symplectique et considérons les sous-groupes de \mathbb{S} suivants :

$$Q := \exp\{\mathbb{R}H \oplus \mathfrak{l}^*\}, \quad \mathbb{Y} := \exp\{\mathfrak{l} \oplus \mathbb{R}E\}. \quad (3.1.5)$$

Le sous-groupe \mathbb{Y} est Abélien, normalisé par Q et \mathbb{S} est isomorphe au produit semi-direct $Q \ltimes \mathbb{Y}$. La propriété fondamentale de la décomposition de Pyatetskii-Shapiro (3.1.1) d'un groupe Kählérien de courbure négative G en groupes élémentaires, c'est que les homéomorphismes d'extensions :

$$\mathbf{R}_j \in \text{Hom}(G_j, \text{Aut}(\mathbb{S}_j)), \quad G_j := (\mathbb{S}_d \times \dots) \times \mathbb{S}_{j+1}, \quad j = 1, \dots, d-1, \quad (3.1.6)$$

prennent leurs valeurs dans $\text{Sp}(V_j, \varpi_j)$ qui, dans la carte (3.1.3), agit linéairement sur V_j . En particulier, les homéomorphismes d'extensions préservent les mesures de Haar à gauche :

$$\mathbf{R}_j(g)^* d_{\mathbb{S}_j} = d_{\mathbb{S}_j}, \quad \forall g \in G_j, \quad \forall j = 1, \dots, d-1. \quad (3.1.7)$$

Ainsi, que l'on choisisse de paramétrer un élément $g \in G = ((\dots \mathbb{S}_d \times \dots) \times \mathbb{S}_2) \times \mathbb{S}_1$ par $g = g_d \dots g_2 g_1$, ou par $g = g_1 g_2 \dots g_d$, $g_j \in \mathbb{S}_j$, la mesure produit $d_{\mathbb{S}_1}^\lambda(g_1) \dots d_{\mathbb{S}_d}^\lambda(g_d)$ est une mesure de Haar à gauche sur G .

Nous allons munir maintenant tout groupe élémentaire \mathbb{S} d'une structure d'espace symétrique (dans le sens de Loos [67]) symplectique :

Définition 3.1.1. *Un espace symétrique symplectique est un triplet (M, s, ω) où*

- (i) *M est une variété connexe,*
- (ii) *s est une application lisse*

$$s : M \times M \rightarrow M,$$

telle que

- (ii.1) *Pour tout $x \in M$, l'application partielle*

$$s_x : M \rightarrow M, \quad y \mapsto s(x, y),$$

est un difféomorphisme involutif admettant x comme point fixe isolé. Le difféomorphisme s_x est appelé la symétrie au point x .

- (ii.2) *Pour tout couple de points (x, y) dans M , on a :*

$$s_x \circ s_y \circ s_x = s_{s_x(y)}.$$

(iii) ω est une forme symplectique sur M qui est laissée invariante par les symétries :

$$s_x^* \omega = \omega, \quad \forall x \in M.$$

À la notion d'espace symétrique symplectique est attachée celle de groupe d'automorphisme d'espace symétrique symplectique, $\mathbf{Aut}(M, s, \omega)$. C'est le sous-groupe des symplectomorphismes φ qui sont covariants vis-à-vis des symétries :

$$\varphi \circ s_x = s_{\varphi(x)} \circ \varphi, \quad \forall x \in M.$$

Ce qui est essentiel c'est que $\mathbf{Aut}(M, s, \omega)$ est toujours un groupe de Lie et qu'il agit transitivement sur M . Évidemment, un espace symétrique symplectique peut être réalisé comme un espace homogène de plusieurs façons et en voici une particulière. Fixons o un point de base dans M . La symétrie au point de base donne alors naissance à un automorphisme involutif du groupe d'automorphisme de l'espace symétrique symplectique par la formule :

$$\sigma : \mathbf{Aut}(M, s, \omega) \rightarrow \mathbf{Aut}(M, s, \omega), \quad g \mapsto s_o \circ g \circ s_o. \quad (3.1.8)$$

En particulier, le groupe $G(M)$ des transvections de M , c'est-à-dire le groupe engendré par les produits pairs de symétries :

$$G(M) = \text{gr}\{s_x \circ s_y \mid x, y \in M\}.$$

est le plus petit sous-groupe de $\mathbf{Aut}(M, s, \omega)$ qui soit à la fois stable par σ et qui agisse transitivement sur M . Soit K la composante au neutre du sous-groupe de $G(M)$ des éléments fixés par l'involution σ . On a alors une identification d'espaces symétriques $G(M)/K \simeq M$, où la structure d'espace symétrique de $G(M)/K$ est donnée par :

$$s_{gK}(g'K) := g\sigma(g^{-1}g')K. \quad (3.1.9)$$

Ainsi, tout espace symétrique peut être décrit par le groupe involutif $(G(M), \sigma)$. Mentionnons finalement que pour un espace symétrique symplectique, l'action par symplectomorphismes du groupe de transvection n'est pas nécessairement Hamiltonienne mais il est toujours possible de faire une extension centrale du groupe des transvections $G(M)$ afin que l'action du groupe étendu devienne Hamiltonienne. Pour simplifier les notations, nous ne distinguerons pas le groupe de transvection de son extension centrale.

Pour décrire la structure d'espace symétrique sur un groupe élémentaire \mathbb{S} , il suffit de décrire son groupe de transvection, l'involution qui lui est attachée ainsi qu'une injection $\mathbb{S} \hookrightarrow G(\mathbb{S})$. Et comme tous les groupes ici sont des groupes exponentiels, il suffit de décrire la situation au niveau des algèbres de Lie. L'algèbre de lie \mathfrak{g} du groupe des transvections $G(\mathbb{S})$ est une extension unidimensionnelle de deux copies de l'algèbre de Lie du groupe de Heisenberg :

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{a} \rtimes_{\rho} (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}), \quad (3.1.10)$$

où, ici aussi, $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H$ et l'homomorphisme d'extension est donné par $\rho := \rho_{\mathfrak{h}} \oplus (-\rho_{\mathfrak{h}}) \in \text{Der}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$, avec $\rho_{\mathfrak{h}}$ défini dans (3.1.2). L'involution σ au niveau de \mathfrak{g} est quant à elle donnée par :

$$\sigma(aH, X, Y) := (-aH, Y, X), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{h}, \quad (3.1.11)$$

et l'injection de \mathfrak{s} dans \mathfrak{g} est associée à l'isomorphisme d'algèbres de Lie :

$$\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{a} \ltimes (\mathfrak{h} \oplus \{0\}) \subset \mathfrak{g}. \quad (3.1.12)$$

Il est facile de voir que sous cette injection, le groupe \mathbb{S} agit simplement transitivement sur $G(\mathbb{S})/K$ et que sous l'identification canonique $\mathbb{S} \simeq G(\mathbb{S})/K$, $g \mapsto gK$, cette action coïncide avec l'action régulière gauche de \mathbb{S} sur lui-même. Il est à noter que l'action linéaire de $\mathrm{Sp}(V, \varpi)$ sur V est à la fois par automorphisme du groupe \mathbb{S} et par automorphisme de l'espace symétrique symplectique \mathbb{S} . En fait, on a l'identification suivante :

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{S}) \cap \mathrm{Aut}(\mathbb{S}, s, \omega) \simeq \mathrm{Sp}(V, \varpi).$$

La décomposition Lagrangienne $V = \mathfrak{l}^* \oplus \mathfrak{l}$ et la décomposition globale associée $\mathbb{S} \simeq Q \ltimes \mathbb{Y}$, munissent aussi l'espace symétrique symplectique \mathbb{S} d'une polarisation globale (c'est-à-dire une distribution tangente et $G(\mathbb{S})$ -invariante sur $T\mathbb{S}$). Finalement, mentionnons qu'il existe un sous-groupe B de $G(\mathbb{S})$ (dont l'algèbre de Lie est une algèbre de polarisation) qui est stable par l'involution σ , qui contient \mathbb{Y} et qui est tel que l'application

$$Q \times B \rightarrow G(\mathbb{S}), \quad (q, b) \mapsto qb, \quad (3.1.13)$$

est un difféomorphisme global. Relativement à cette décomposition, pour $g \in G(\mathbb{S})$, notons $g^Q \in Q$ et $g^B \in B$ tels que $g = g^Q g^B$. Alors, la relation

$$\underline{s} : Q \times Q \rightarrow Q, \quad (q, q') \mapsto q(\sigma(q^{-1}q'))^Q, \quad (3.1.14)$$

définit sur Q une structure d'espace symétrique (pas symplectique!) invariante à gauche sur le groupe de Lie Q . Au neutre, et relativement à la décomposition $Q = \exp\{\mathbb{R}H\} \ltimes \exp\{\mathfrak{l}^*\}$, on a :

$$\underline{s}_e : Q \rightarrow Q, \quad q = an \mapsto a^{-1}n^{-1}, \quad (3.1.15)$$

et la mesure de Haar à gauche sur Q est invariante par \underline{s}_e . Passons finalement à la notion d'application point-milieu :

Définition 3.1.2. *Soit (M, s) un espace symétrique. Une application point-milieu sur M est une application lisse*

$$M \times M \rightarrow M, \quad (x, y) \mapsto \mathrm{mid}(x, y),$$

telle que pour tous $x, y \in M$, on a :

$$s_{\mathrm{mid}(x, y)}(x) = y.$$

On peut montrer que lorsqu'elle existe, une application point-milieu sur un espace symétrique est nécessairement unique. Si de plus les applications partielles $s^y : M \rightarrow M$, $x \mapsto s_x(y)$ sont des difféomorphismes globaux de M , l'application point-milieu existe et est donnée par :

$$\mathrm{mid}(x, y) := (s^x)^{-1}(y), \quad \forall x, y \in M.$$

Notons qu'alors, on a pour tout élément $\varphi \in \text{Aut}(M, s)$:

$$\varphi(\text{mid}(x, y)) = \text{mid}(\varphi(x), \varphi(y)), \quad \forall \varphi \in \text{Aut}(M, s), x, y \in M.$$

C'est en particulier le cas pour l'espace symétrique associé à un groupe élémentaire \mathbb{S} et aussi pour celui associé à son sous-groupe Q . Nous désignerons les applications point-milieux qui leur sont associées par respectivement $\text{mid}_{\mathbb{S}}$ et mid_Q . Notons de plus que l'application triangle médian :

$$\Phi_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (\text{mid}_{\mathbb{S}}(x_1, x_2), \text{mid}_{\mathbb{S}}(x_2, x_3), \text{mid}_{\mathbb{S}}(x_3, x_1)), \quad (3.1.16)$$

est un difféomorphisme global de \mathbb{S}^3 qui est \mathbb{S} -invariant par rapport à l'action diagonale gauche :

$$\Phi_{\mathbb{S}}(gg_1, gg_2, gg_3) = \Phi_{\mathbb{S}}(g_1, g_2, g_3), \quad \forall g, g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{S}.$$

3.2 Quantification des groupes Kählériens

3.2.1 Cas des groupes élémentaires

Le groupe de transvection $G(\mathbb{S}) \simeq QB$ de l'espace symplectique symétrique associé à un groupe élémentaire $\mathbb{S} \simeq Q \times \mathbb{Y}$, possède une famille à un paramètre, $\theta \in \mathbb{R}^*$, de vraies (i.e. pas projective) représentations unitaires, irréductibles et non équivalentes $(U_{\theta})_{\theta \in \mathbb{R}^*}$, sur $L_{\lambda}^2(Q)$, qui sont données par :

$$U_{\theta}(qb)\varphi(q_0) = \chi_{\theta}(\mathbf{C}_{q_0^{-1}q}(b))\varphi(q^{-1}q_0), \quad q \in Q, b \in B, \varphi \in L_{\lambda}^2(Q), \quad (3.2.1)$$

où $(\chi_{\theta})_{\theta \in \mathbb{R}^*}$ est une famille de caractères unitaires et σ -invariants de B et \mathbf{C} est la conjugaison de $G(\mathbb{S})$ sur lui-même. La représentation de \mathbb{S} que l'on considère est donnée par la restriction de cette dernière à \mathbb{S} , que nous continuerons à désigner par U_{θ} . Ces représentations sont toujours irréductibles mais sont non équivalentes seulement pour des paramètres de signes différents. La représentation U_{θ} de \mathbb{S} sur $L_{\lambda}^2(Q)$ est aussi de carré intégrable. Considérons maintenant l'opérateur

$$\Sigma : L_{\lambda}^2(Q) \rightarrow L_{\lambda}^2(Q), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \underline{s}_e, \quad (3.2.2)$$

où \underline{s}_e est la symétrie au neutre de Q , définie en (3.1.15). Étant donné que la mesure de Haar à gauche sur Q est aussi invariante par \underline{s}_e , Σ n'est pas seulement involutif mais est aussi auto-adjoint : $\Sigma \in \mathcal{U}_{sa}(L_{\lambda}^2(Q))$. En conjuguant Σ par la représentation U_{θ} de $G(\mathbb{S})$, on obtient les propriétés suivantes :

Proposition 3.2.1. [8, Proposition 6.22] Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ fixé. L'application

$$G(\mathbb{S}) \rightarrow \mathcal{U}_{sa}(L_{\lambda}^2(Q)), \quad g \mapsto U_{\theta}(g) \Sigma U_{\theta}(g)^*,$$

est constante sur les classes à gauche du sous-groupe K de $G(\mathbb{S})$ formé des éléments σ -invariants. L'application quotient correspondante :

$$\Omega_{\theta}^{\mathbb{S}} : G(\mathbb{S})/K \simeq \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{U}_{sa}(L_{\lambda}^2(Q)), \quad gK \mapsto \Omega_{\theta}(gK) := U_{\theta}(g) \Sigma U_{\theta}(g)^*,$$

définit une représentation unitaire de l'espace symétrique $\mathbb{S} \simeq G(\mathbb{S})/K$, dans le sens où pour tout $x, y \in G(\mathbb{S})/K$ et tout $g \in G(\mathbb{S})$, on a :

$$\Omega_{\theta}^{\mathbb{S}}(x)^2 = \text{Id}, \quad \Omega_{\theta}^{\mathbb{S}}(x) \Omega_{\theta}^{\mathbb{S}}(y) \Omega_{\theta}^{\mathbb{S}}(x) = \Omega_{\theta}^{\mathbb{S}}(s_x(y)), \quad U_{\theta}(g) \Omega_{\theta}^{\mathbb{S}}(x) U_{\theta}(g)^* = \Omega_{\theta}^{\mathbb{S}}(g.x). \quad (3.2.3)$$

En paramétrant un élément $g \in \mathbb{S}$ par $g = qb$, avec $q \in Q$ et $b \in \mathbb{Y}$, on a pour $\varphi \in L^2_\lambda(Q)$:

$$\Omega_\theta^\mathbb{S}(g) \varphi(q_0) = \mathbf{E}_\theta(q_0^{-1}qb) \varphi(\underline{s}_q(q_0)), \quad (3.2.4)$$

où \underline{s} est la symétrie du groupe de Lie symétrique Q donnée dans l'équation (3.1.14) et $\mathbf{E}_\theta \in C^\infty(\mathbb{S}, \mathbb{T}^1)$ est la phase définie par :

$$\mathbf{E}_\theta(qb) := \chi_\theta \left(\mathbf{C}_q(\sigma(b)b^{-1}) \right), \quad q \in Q, b \in \mathbb{Y}. \quad (3.2.5)$$

Définition 3.2.2. *Nous appellerons la fonction \mathbf{E}_θ donnée en (3.2.5), la phase à un point.*

La version intégrée de la représentation unitaire de l'espace symétrique symplectique (\mathbb{S}, s, ω) , définit le prototype d'une quantification \mathbb{S} -équivariante sur le groupe \mathbb{S} :

Définition 3.2.3. *Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. La quantification du groupe élémentaire \mathbb{S} est donnée par l'application linéaire, continue et $G(\mathbb{S})$ -équivariante :*

$$\tilde{\Omega}_\theta^\mathbb{S} : L^1(\mathbb{S}) \rightarrow \mathcal{B}(L^2_\lambda(Q)), \quad f \mapsto \int_{\mathbb{S}} f(x) \Omega_\theta^\mathbb{S}(x) dx.$$

Remarque 3.2.4. La quantification définie plus haut généralise la quantification de Weyl pour \mathbb{R}^{2n} du point de vue des symétries. Dans le cas de la dimension deux (c'est-à-dire pour le groupe affine de la droite réelle) cette construction coïncide avec le calcul de Fuchs d'Unterberger [89].

Pour obtenir une quantification unitaire entre $L^2_\lambda(\mathbb{S})$ et l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2(L^2_\lambda(Q))$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2_\lambda(Q)$, il est nécessaire d'introduire un paramètre fonctionnel dans la construction :

Définition 3.2.5. *En identifiant une fonction Borélienne \mathbf{m} sur Q avec l'opérateur sur $L^2_\lambda(Q)$ de multiplication par cette fonction, on pose*

$$\Sigma_{\mathbf{m}} := \mathbf{m} \circ \Sigma.$$

Lorsque \mathbf{m} est localement essentiellement bornée les opérateurs $U_\theta(g) \Sigma_{\mathbf{m}} U_\theta(g)^*$, $g \in \mathbb{S}$, sont densément définis sur le domaine $C_c^\infty(Q)$ et s'étendent en des opérateurs bornés si et seulement si la fonction \mathbf{m} est essentiellement bornée. Nous verrons que pour obtenir une quantification unitaire nous sommes forcés de considérer une fonction \mathbf{m} non bornée. Par ailleurs, lorsque $\mathbf{m} \in C^\infty(Q)$ et $\overline{\mathbf{m}} \circ \underline{s}_e = \mathbf{m}$, l'opérateur $\Sigma_{\mathbf{m}}$ devient symétrique sur $C_c^\infty(Q)$, il préserve son domaine et son carré coïncide avec l'opérateur de multiplication par $|\mathbf{m}|^2$. De cela, il est facile de montrer que $\Sigma_{\mathbf{m}}$ est en fait essentiellement auto-adjoint.

Soit maintenant l'application $\Psi : Q \rightarrow \mathfrak{q}$, implicitement définie par

$$\text{ad}_{\Psi(q)} = \text{Ad}_{q^{-1}} - \text{Ad}_{(\underline{s}_e q)^{-1}}, \quad q \in Q. \quad (3.2.6)$$

Cette application est en fait un difféomorphisme global entre le groupe Q et son algèbre de Lie \mathfrak{q} , on pose alors :

$$\mathbf{m}_0(q) := \left| \text{Jac}_{\underline{s}_e}(q^{-1}) \text{Jac}_{\Psi}(q) \right|^{1/2}. \quad (3.2.7)$$

En utilisant le fait que la norme Hilbert-Schmidt d'un opérateur coïncide avec la norme L^2 de son noyau, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 3.2.6. [8, Theorem 6.43] Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. L'application définie sur $C_c^\infty(\mathbb{S})$ à valeurs dans les opérateurs densément définis et préservant le domaine $C_c^\infty(Q)$:

$$\Omega_\theta^{\mathbb{S}} : f \mapsto \int_{\mathbb{S}} f(g) U_\theta(g) \Sigma_{\mathbf{m}_0} U_\theta(g)^* dg,$$

s'étend en un opérateur unitaire entre $L_\lambda^2(\mathbb{S})$ et $\mathcal{L}^2(L_\lambda^2(Q))$.

En transportant la structure d'algèbre Hilbertienne de $\mathcal{L}^2(L_\lambda^2(Q))$ sur $L_\lambda^2(\mathbb{S})$, via $\Omega_\theta^{\mathbb{S}}$, nous obtenons un star-produit \mathbb{S} -équivariant à gauche sur $L_\lambda^2(\mathbb{S})$:

$$f_1 \star_\theta f_2 := \Omega_{\theta, \mathbf{m}_0}^{\mathbb{S}-1} \left(\Omega_{\theta, \mathbf{m}_0}^{\mathbb{S}}(f_1) \Omega_{\theta, \mathbf{m}_0}^{\mathbb{S}}(f_2) \right). \quad (3.2.8)$$

Comme expliqué précédemment, le noyau à trois points associé à ce star-produit peut être explicitement calculé :

$$K_\theta^{\mathbb{S}}(g_1, g_2, g_3) = |\text{Jac}_{\Phi_{\mathbb{S}}^{-1}}|(g_1, g_2, g_3)^{1/2} \exp \left\{ \frac{2i}{\theta} \text{Area} \left(\Phi_{\mathbb{S}}^{-1}(g_1, g_2, g_3) \right) \right\}, \quad (3.2.9)$$

où $\Phi_{\mathbb{S}}$ désigne l'application triangle médian (3.1.16) et, pour un triangle géodésique orienté (x, y, z) dans \mathbb{S} , $\text{Area}(x, y, z)$ désigne l'aire symplectique de ce triangle. En utilisant l'invariance de la fonction $\Phi_{\mathbb{S}}$ sous l'action diagonale à gauche de \mathbb{S} on en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.2.7. [8, Proposition 7.18] Pour $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\mathbb{S})$, on a avec ρ la représentation régulière droite :

$$f_1 \star_\theta f_2 = \int_{\mathbb{S} \times \mathbb{S}} |\text{Jac}_{\Phi_{\mathbb{S}}^{-1}}|(e, g_1, g_2)^{1/2} \exp \left\{ \frac{2i}{\theta} \text{Area} \left(\Phi_{\mathbb{S}}^{-1}(e, g_1, g_2) \right) \right\} \rho_{g_1}(f_1) \rho_{g_2}(f_2) dg_1 dg_2.$$

De plus, dans la carte (3.1.3), on a :

$$\begin{aligned} |\text{Jac}_{\Phi_{\mathbb{S}}^{-1}}|(e, g_1, g_2) &= \left(\cosh a_1 \cosh a_2 \cosh(a_1 - a_2) \right)^{2d} \cosh 2a_1 \cosh 2a_2 \cosh(2a_1 - 2a_2), \\ \text{Area} \left(\Phi_{\mathbb{S}}^{-1}(e, g_1, g_2) \right) &= t_2 \sinh 2a_1 - t_1 \sinh 2a_2 + \varpi(v_1, v_2) \cosh a_1 \cosh a_2. \end{aligned}$$

3.2.2 Cas général

Soit maintenant un groupe Kählérien de courbure négative quelconque G , de décomposition de Pyatetskii-Shapiro :

$$G = \left(\left(\dots \left(\mathbb{S}_d \times \mathbb{S}_{d-1} \right) \times \dots \right) \times \mathbb{S}_2 \right) \times \mathbb{S}_1. \quad (3.2.10)$$

On va maintenant construire une quantification unitaire et G -équivariante sur G :

$$\Omega_\theta^G \in \mathcal{U} \left(L_\lambda^2(G), \mathcal{L}^2(L_\lambda^2(Q_d \times \dots \times Q_1)) \right).$$

Pour construire cette quantification, nous devons donner plus de détails sur la quantification d'un groupe élémentaire \mathbb{S} . Premièrement, la quantification $\Omega_\theta^{\mathbb{S}}$ possède en fait un groupe de covariance $L(\mathbb{S})$ strictement plus grand que le groupe de transvection $G(\mathbb{S})$ (mais strictement plus petit que le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\mathbb{S}, \omega, s)$, qui par contre est le groupe de covariance maximal du star-produit donné dans la Proposition 3.2.7). Ce

groupe $L(\mathbb{S})$ agit sur $L_\lambda^2(Q)$ par une action qui étend celle de $G(\mathbb{S})$. $L(\mathbb{S})$ peut être caractérisé comme le sous-groupe maximal de $\text{Aut}(\mathbb{S}, s, \omega_{\mathbb{S}})$ qui préserve la polarisation associée à la décomposition $V = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l}^*$. En définissant $\mathbf{D}(\mathbb{S}) \subset L(\mathbb{S})$ comme le groupe d'isotropie au neutre de \mathbb{S} , on obtient un autre isomorphisme d'espaces symétriques symplectiques $\mathbb{S} \simeq L(\mathbb{S})/\mathbf{D}(\mathbb{S})$. Soit maintenant AN le facteur d'Iwasawa de $Sp(V, \varpi)$. En utilisant le Théorème de conjugaison de Borel, on peut montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\hat{\rho} : AN \rightarrow \mathbf{D}(\mathbb{S})$. Pour simplifier un peu la discussion, supposons maintenant que le groupe G possède seulement deux facteurs élémentaires :

$$G = \mathbb{S}_2 \times_{\mathbf{R}} \mathbb{S}_1. \quad (3.2.11)$$

En utilisant plus finement les résultats de Pyatetskii-Shapiro [77], on montre que l'action de \mathbb{S}_2 sur \mathbb{S}_1 se factorise par un sous-groupe résoluble de $Sp(V_1, \varpi_1)$. Ainsi, l'action de \mathbb{S}_2 sur \mathbb{S}_1 se factorise par $(AN)_1$ (le facteur d'Iwasawa de $Sp(V_1, \varpi_1)$) et nous déduisons un morphisme $\tilde{\rho} : \mathbb{S}_2 \rightarrow (AN)_1$. En composant $\hat{\rho}$ avec $\tilde{\rho}$ on obtient finalement un morphisme de groupes :

$$\rho : \mathbb{S}_2 \rightarrow \mathbf{D}_1. \quad (3.2.12)$$

Ce morphisme à deux propriétés importantes. Premièrement, $\rho(\mathbb{S}_2)$ normalise \mathbb{S}_1 dans $L(\mathbb{S}_1)$. Deuxièmement, le morphisme d'extension \mathbf{R} dans la décomposition de Pyatetskii-Shapiro (3.2.11) coïncide avec l'action par conjugaison composée avec ρ :

$$\mathbf{R}_{g_2}(g_1) = \rho(g_2)g_1\rho(g_2)^{-1}, \quad \forall g_1 \in \mathbb{S}_1, g_2 \in \mathbb{S}_2.$$

En paramétrant un élément $g \in G = \mathbb{S}_2 \times_{\mathbf{R}} \mathbb{S}_1$ comme $g = g_2g_1$, $g_j \in \mathbb{S}_j$, on obtient une représentation unitaire :

$$U_\theta : \mathbb{S}_2 \times_{\mathbf{R}} \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathcal{U}(L_\lambda^2(Q_2) \otimes L_\lambda^2(Q_1)), \quad g \mapsto U_{\theta,2}(g_2) \otimes U_{\theta,1}(\rho(g_2)g_1), \quad (3.2.13)$$

où $U_{\theta,j}$ est la représentation de $L(\mathbb{S}_j)$ sur $L_\lambda^2(Q_j)$ étendant (3.2.1). Avec $\mathbf{m}_{0,j}$ la fonction (3.2.7) sur Q_j ($\mathbb{S}_j = Q_j \times \mathbb{Y}_j$) et avec $\Sigma_{\mathbf{m}_{0,j}}$ l'opérateur considéré à la Proposition 3.2.6, on définit les opérateurs suivants sur $L_\lambda^2(Q_2 \times Q_1)$:

$$\Omega_\theta^G(g) := U_\theta(g) \circ \mathbf{m}_{0,2} \circ (\Sigma_{\mathbf{m}_{0,1}} \otimes \Sigma_{\mathbf{m}_{0,2}}) \circ U_\theta(g)^*, \quad g \in G.$$

Cette construction élémentaire par produits tensoriels, nous permet de reproduire dans le cas de G les résultats obtenus précédemment pour \mathbb{S} :

Théorème 3.2.8. [8, Proposition 6.60 & Theorem 6.63] Soit $G = \mathbb{S}_2 \times_{\mathbf{R}} \mathbb{S}_1$.

(i) En paramétrant un élément $g \in G$ par $g = g_1g_2$, $g_j \in \mathbb{S}_j$, on a :

$$\Omega_\theta^G(g) = \Omega_\theta^{\mathbb{S}_2}(g_2) \otimes \Omega_\theta^{\mathbb{S}_1}(g_1),$$

ainsi, en posant $g_j = q_jb_j \in \mathbb{S}_j$, $q_j \in Q_j$, $b_j \in \mathbb{Y}_j$, on obtient pour $\varphi \in C_c^\infty(Q_2 \times Q_1)$:

$$\Omega_\theta^G(g)\varphi(\bar{q}_2, \bar{q}_1) = \mathbf{m}_{0,2}(q_2^{-1}\bar{q}_2)\mathbf{m}_{0,1}(q_1^{-1}\bar{q}_1)\mathbf{E}^{\mathbb{S}_2}(\bar{q}_2^{-1}q_2b_2)\mathbf{E}^{\mathbb{S}_1}(\bar{q}_1^{-1}q_1b_1)\varphi(\underline{s}_{q_2}\bar{q}_2, \underline{s}_{q_1}\bar{q}_1),$$

où $\mathbf{E}^{\mathbb{S}_j}$, $j = 1, 2$, est la phase à un point sur \mathbb{S}_j , donnée dans (3.2.5).

(ii) *L'application*

$$\Omega_\theta^G : L_\lambda^2(G) \rightarrow \mathcal{L}^2\left(L_\lambda^2(Q_2 \times Q_1)\right), \quad f \mapsto \int_G f(g) \Omega_\theta^G(g) d_G(g),$$

est unitaire et G -équivariante.

(iii) *Le star-produit associé :*

$$f_1 \star_\theta f_2 := \Omega_\theta^{G^{-1}} \left[\Omega_\theta^G(f_1) \Omega_\theta^G(f_2) \right],$$

est donné sur $C_c^\infty(G)$ par l'expression

$$f_1 \star_\theta f_2(g) = \int_{G^2} K_\theta^G(g, g', g'') f_1(g') f_2(g'') d_G(g') d_G(g''),$$

où le noyau K_θ^G est donné, avec $g = g_1 g_2$, $g' = g'_1 g'_2$, $g'' = g''_1 g''_2$, par :

$$K_\theta^G(g, g', g'') := K_\theta^{\mathbb{S}_2}(g_2, g'_2, g''_2) K_\theta^{\mathbb{S}_1}(g_1, g'_1, g''_1),$$

avec

$$K_\theta^{\mathbb{S}_j}(g_j, g'_j, g''_j) = |\text{Jac}_{\Phi_{\mathbb{S}_j}^{-1}}|(g_j, g'_j, g''_j)^{1/2} \exp\left\{\frac{2i}{\theta} \text{Area}\left(\Phi_{\mathbb{S}_j}^{-1}(g_j, g'_j, g''_j)\right)\right\}.$$

Bien entendu, nous pouvons itérer cette construction pour un nombre arbitraire de facteurs élémentaires et ainsi obtenir une quantification Ω_θ^G unitaire et G -équivariante pour tout groupe Kählérien de courbure négative G . Le noyau à deux points associé est alors donné par :

$$\mathbf{K}_\theta^G(g, g') = \prod_{j=1}^d |\text{Jac}_{\Phi_{\mathbb{S}_j}^{-1}}|(e, g_j, g'_j)^{1/2} \exp\left\{\frac{2i}{\theta} \text{Area}\left(\Phi_{\mathbb{S}_j}^{-1}(g_j, g'_j, g''_j)\right)\right\}. \quad (3.2.14)$$

3.3 Intégrales oscillantes

Pour obtenir une théorie des déformations des algèbres de Fréchet, la première étape consiste à construire une notion d'intégrale oscillante à partir de la phase du noyau à deux points :

$$S_G(g, g') := \sum_{j=1}^d \text{Area}\left(\Phi_{\mathbb{S}_j}^{-1}(e, g_j, g'_j)\right). \quad (3.3.1)$$

C'est aussi et surtout à l'aide de cette fonction que nous allons définir un système de coordonnées globales sur le groupe produit $G \times G$. Posons aussi

$$A_G(g, g') := \prod_{j=1}^d |\text{Jac}_{\Phi_{\mathbb{S}_j}^{-1}}|(e, g_j, g'_j)^{1/2}, \quad (3.3.2)$$

pour l'amplitude du noyau (3.2.14).

Proposition 3.3.1. [8, Lemma 2.21 & Theorem 3.35] Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie G et soit $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})^*$ le dual de l'algèbre de Lie de $G \times G$. Pour un élément $X \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ on définit \widetilde{X} comme étant le champs de vecteur invariant à gauche sur $G \times G$ qui lui est associé.

(i) L'application

$$G \times G \rightarrow (\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})^*, \quad g \mapsto [X \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \mapsto (\widetilde{X} S_G)(g)], \quad (3.3.3)$$

définit un difféomorphisme global.

(ii) Dans ce système de coordonnées, la multiplication et l'inverse de $G \times G$ sont des applications tempérées (dans le sens des fonctions tempérées de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m).

(iii) L'amplitude A_G et la fonction modulaire sont aussi tempérées dans ce système de coordonnées et la mesure de Haar de $G \times G$ devient un multiple de la mesure de Lebesgue sur $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})^*$ par une densité tempérée.

Pour construire cette notion d'intégrale oscillante, nous sommes amenés à considérer certains espaces fonctionnels sur des groupes de Lie non compacts. Nous commençons par définir une notion de poids sur un groupe de Lie. (Une notion similaire apparaît dans [84].)

Définition 3.3.2. Soit G un groupe de Lie réel et connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Un élément $\mu \in C^\infty(G, \mathbb{R}_+^*)$ est appelé un poids si il satisfait aux propriétés suivantes :

(i) Pour tout élément $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, il existe $C_L, C_R > 0$ telles que \widetilde{X} et \underline{X} désignent les opérateurs différentiels invariants respectivement à gauche et à droite sur G associés :

$$|\widetilde{X}\mu| \leq C_L \mu \quad \text{et} \quad |\underline{X}\mu| \leq C_R \mu.$$

(ii) Il existe $C, L, R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tous $g, h \in G$ on a :

$$\mu(gh) \leq C \mu(g)^L \mu(h)^R.$$

(iii) Soient μ et $\hat{\mu}$ deux poids sur G . On dira que $\hat{\mu}$ domine μ lorsque

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\mu(g)}{\hat{\mu}(g)} = 0.$$

L'exemple de poids le plus important pour ce qui va suivre est donné par le poids modulaire (à ne pas confondre avec la fonction modulaire Δ_G) :

$$\mathfrak{d}_G : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \mapsto \sqrt{1 + \|\text{Ad}_x\|^2 + \|\text{Ad}_{x^{-1}}\|^2}, \quad (3.3.4)$$

où Ad désigne l'action adjointe de G sur \mathfrak{g} et $\|\cdot\|$ désigne la norme d'opérateurs pour n'importe quelle structure Euclidienne sur \mathfrak{g} .

Dans le cas d'un groupe Kählérien de courbure négative G , le poids modulaire est une fonction tempérée (dans le sens de la Proposition (3.3.1)) et domine le poids constant :

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \mathfrak{d}_G(g) = \infty.$$

Soit maintenant \mathcal{E} un espace de Fréchet dont la topologie est associée à une famille dénombrable de semi-normes $\{\|\cdot\|_j\}_{j \in J}$ et soit $\underline{\mu} = \{\mu_j\}_{j \in J}$ une famille dénombrable de

poids sur G . On définit alors l'espace symboles d'ordre $\underline{\mu}$ sur G et à valeurs dans \mathcal{E} (un type similaire d'espaces de symboles apparaît dans [65]) par :

$$\mathcal{B}^{\underline{\mu}}(G, \mathcal{E}) := \left\{ F \in C^\infty(G, \mathcal{E}) : \forall X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \forall j \in J, \exists C > 0 : \|\widetilde{X}F\|_j \leq C \mu_j \right\}. \quad (3.3.5)$$

Pour $\underline{\mu} = (1, 1, \dots)$, nous désignerons l'espace de symboles associé par $\mathcal{B}(G, \mathcal{E})$. Ces espaces de symboles apparaissent naturellement dans le contexte des actions de groupes sur les espaces de Fréchet :

Lemme 3.3.3. [8, Lemma 5.5] *Soit \mathcal{E} un espace de Fréchet muni d'une action isométrique (pour chaque semi-normes qui définit la topologie de \mathcal{E}) et fortement continue α d'un groupe de Lie G . Considérons \mathcal{E}^∞ l'espace des vecteurs lisses de \mathcal{E} pour l'action α et $\underline{\nu} := \{\mathfrak{d}_G^j\}_{j \in \mathbb{N}}$. On a alors une injection équivariante et continue*

$$\alpha : \mathcal{E}^\infty \rightarrow \mathcal{B}^{\underline{\nu}}(G, \mathcal{E}^\infty), \quad a \mapsto \alpha(a) = [g \in G \mapsto \alpha_g(a)]. \quad (3.3.6)$$

Remarque 3.3.4. Si nous ne voulions pas prendre en compte la topologie de \mathcal{E}^∞ dans la cible de l'application (3.3.6), mais seulement celle de \mathcal{E} , nous aurions alors un plongement isométrique $\alpha : \mathcal{E}^\infty \rightarrow \mathcal{B}(G, \mathcal{E})$.

On munira les espaces de symboles $\mathcal{B}^{\underline{\mu}}(G, \mathcal{E})$ de la topologie associée à la famille de semi-normes suivantes (dans la suite $X^\beta := X_1^{\beta_1} \dots X_{\dim(G)}^{\beta_{\dim(G)}}$, $\beta \in \mathbb{N}^{\dim(G)}$, désigne une base de PBW associée au choix d'une base $\{X_1, \dots, X_{\dim(G)}\}$, de \mathfrak{g}) :

$$\|F\|_{j,k,\underline{\mu}} := \sup_{|\beta| \leq k} \sup_{g \in G} \left\{ \frac{\|\widetilde{X}^\beta F(g)\|_j}{\mu_j(g)} \right\}, \quad j, k \in \mathbb{N}. \quad (3.3.7)$$

Muni de cette topologie, l'espace $\mathcal{B}^{\underline{\mu}}(G, \mathcal{E})$ devient lui-même un espace de Fréchet. De plus, $\mathcal{B}(G, \mathbb{C})$ coïncide avec l'espace des vecteurs lisses pour la représentation régulière droite sur la C^* -algèbre des fonctions bornées et uniformément continues à droite sur G . La propriété qui est la base de notre notion d'intégrale oscillante est la suivante :

Lemme 3.3.5. [8, Lemma 2.12] *Soient (G, \mathcal{E}) comme précédemment et soit $\underline{\mu}, \hat{\underline{\mu}}$ deux familles de poids sur G telles que $\hat{\mu}_j$ domine μ_j pour tout $j \in J$. Alors, $\mathcal{B}^{\hat{\underline{\mu}}}(G, \mathcal{E}) \subset \mathcal{B}^{\underline{\mu}}(G, \mathcal{E})$ continûment. De plus, l'adhérence de $\mathcal{D}(G, \mathcal{E})$ dans $\mathcal{B}^{\hat{\underline{\mu}}}(G, \mathcal{E})$ contient $\mathcal{B}^{\underline{\mu}}(G, \mathcal{E})$. En particulier, $\mathcal{D}(G, \mathcal{E})$ est dense dans $\mathcal{B}^{\underline{\mu}}(G, \mathcal{E})$ pour la topologie induite de $\mathcal{B}^{\hat{\underline{\mu}}}(G, \mathcal{E})$.*

Nous pouvons aussi définir un espace de Schwartz sur G à valeurs dans \mathcal{E} à partir du poids modulaire \mathfrak{d}_G :

$$\mathcal{S}(G, \mathcal{E}) := \left\{ f \in C^\infty(G, \mathcal{E}) : \forall X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \forall j \in J, \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in G} \|\mathfrak{d}_G^n(x) (\widetilde{X} f)(x)\|_j < \infty \right\}. \quad (3.3.8)$$

Munie de la topologie associée aux semi-normes :

$$\|F\|_{j,k,n} := \sup_{|\beta| \leq k} \sup_{g \in G} \left\{ \|\mathfrak{d}_G^n(g) \widetilde{X}^\beta F(g)\|_j \right\}, \quad j \in J, k, n \in \mathbb{N}, \quad (3.3.9)$$

$\mathcal{S}(G, \mathcal{E})$ devient un espace de Fréchet nucléaire.

Nous allons maintenant construire une famille d'opérateur différentiels sur $G \times G$ satisfaisant aux propriétés (2.2.2) et (2.2.3) pour la phase S_G associée au noyau à deux points \mathbf{K}_θ^G , phase donnée dans (3.3.1). La première difficulté consiste à comprendre le comportement de la fonction S_G sous l'action répétée des champs de vecteurs invariants à gauche : dans ce contexte non Abélien, l'ordre dans lequel nous allons faire des intégrations par parties est de la plus grande importance.

Proposition 3.3.6. [8, Theorem 3.35] Soient G un groupe Kählérien de courbure négative, \mathfrak{g} son algèbre de Lie et $S_G \in C^\infty(G \times G, \mathbb{R})$ la fonction donnée dans (3.3.1). Alors il existe une décomposition en sous-espaces vectoriels :

$$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \bigoplus_{n=0}^N V_n, \quad (3.3.10)$$

et pour $n = 0, \dots, N$, il existe un élément $X_n \in \mathcal{U}(V_n)$ ($\mathcal{U}(V_n)$ est la sous-algèbre unifère de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendrée par V_n), tel que :

— En désignant par α_n le multiplicateur de S_G associé à $X_n \in \mathcal{U}(V_n)$ par la relation

$$\widetilde{X}_n \exp\{\frac{2i}{\theta} S_G\} =: \alpha_n \exp\{\frac{2i}{\theta} S_G\},$$

— En considérant les coordonnées globales sur $G \times G$:

$$x_n^j := \left(\widetilde{e}_j^n S_G \right)(x), \quad n = 0, \dots, N, \quad j = 1, \dots, \dim(V_n), \quad (3.3.11)$$

associées au choix de bases $\{e_j^n\}_{j=1, \dots, \dim(V_n)}$, $n = 0, \dots, N$, des espaces V_n

— Et en posant pour $n \in \{0, \dots, N\}$:

$$V^{(n)} := \bigoplus_{k=0}^n V_k, \quad (3.3.12)$$

nous avons les propriétés suivantes :

(i) Il existe $C_n > 0$ et $\rho_n > 0$ tels que :

$$|\alpha_n| \geq C_n \left(1 + |x_n|_n^{\rho_n} \right),$$

où $x_n := (x_n^j)_{j=1, \dots, \dim(V_n)}$.

(ii) Pour $n = 0, \dots, N$, il existe une fonction tempérée $\mu_n \in C^\infty(G \times G, \mathbb{R}_+^*)$ telle que :

(ii.1) Pour tout $A \in \mathcal{U}(V^{(n)})$ il existe $C_A > 0$ tel que :

$$|\widetilde{A} \alpha_n| \leq C_A |\alpha_n| \mu_n.$$

(ii.2) La fonction μ_n est indépendante des variables $\{x_r^j\}_{j=1, \dots, \dim(V_r)}$, pour $r \leq n$:

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial x_r^j} = 0, \quad \forall r \leq n, \quad \forall j = 1, \dots, \dim(V_r).$$

En se donnant maintenant $\vec{r} = (r_0, \dots, r_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$, on considère alors l'opérateur différentiel

$$\mathbf{D}_{\vec{r}} := D_0^{r_0} D_1^{r_1} \dots D_N^{r_N}, \quad (3.3.13)$$

où pour $n = 0, \dots, N$, et avec $X_n \in \mathcal{U}(V_n)$ donné dans la Proposition 3.3.6, on a posé

$$D_n : C^\infty(G \times G) \rightarrow C^\infty(G \times G), \quad \Phi \mapsto \widetilde{X}_n \left(\frac{\Phi}{\alpha_n} \right). \quad (3.3.14)$$

Bien évidemment, nous avons par construction :

$$\mathbf{D}_{\vec{r}}^* \exp\left\{\frac{2i}{\theta} S_G\right\} = \exp\left\{\frac{2i}{\theta} S_G\right\}, \quad \forall \vec{r}_j \in \mathbb{N}^{N+1}.$$

En combinant les Proposition 3.3.1 et 3.3.6, on en déduit qu'il existe un élément $\underline{r} := \{\vec{r}_j\}_{j \in J}$ tel que la famille $\underline{\mathbf{D}} := \{\mathbf{D}_{\vec{r}_j}\}_{j \in J}$ satisfait à la propriété (2.2.3) :

Proposition 3.3.7. [8, Proposition 2.29] Soient G un groupe Kählérien de courbure négative, \mathcal{E} un espace de Fréchet et μ une famille de poids tempérés sur $G \times G$. Alors, pour tout $j \in J$, il existe $\vec{r}_j \in \mathbb{N}^{N+1}$, $C_j > 0$ et $k_j \in \mathbb{N}$, tels que pour tout élément $F \in \mathcal{B}^\mu(G \times G, \mathcal{E})$, on a

$$\int_{G \times G} \|\mathbf{D}_{\vec{r}_j} F(g)\|_j d_{G \times G}(g) \leq C_j \|F\|_{j, k_j, \underline{\mu}}.$$

En utilisant le fait que l'amplitude A_G donnée dans (3.3.1) appartient à un espace $\mathcal{B}^\mu(G \times G)$ pour un poids tempéré μ , on a alors la notion d'intégrale oscillante suivante :

Définition 3.3.8. Soient \mathcal{E} un espace de Fréchet et $\underline{\mu}, \hat{\underline{\mu}}$ deux familles de poids tempérés sur $G \times G$ telles que $\underline{\mu} \prec \hat{\underline{\mu}}$. Associé à la famille de poids tempérés $\hat{\underline{\mu}}$, considérons $\underline{r} := \{\vec{r}_j\}_{j \in J}$ comme donné dans la Proposition 3.3.7 et soit $\mathbf{D}_{\vec{r}_j}$ l'opérateur différentiel associé (3.3.13). En effectuant une intégration par parties, on obtient une application continue pour la topologie induite de $\mathcal{B}^{\hat{\underline{\mu}}}(G \times G, \mathcal{E})$:

$$C_c^\infty(G \times G, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}, \quad F \mapsto \int_{G \times G} \mathbf{K}_\theta^G F = \int_{G \times G} \exp\left\{\frac{2i}{\theta} S_G\right\} \mathbf{D}_{\vec{r}_j} (A_G F).$$

D'après le Lemme 3.3.5, cette application s'étend uniquement en une application continue

$$\widetilde{\int_{G \times G} \mathbf{K}_\theta^G} : \mathcal{B}^{\hat{\underline{\mu}}}(G \times G, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E},$$

que nous appellerons l'intégrale oscillante pour le noyau \mathbf{K}_θ^G .

Remarque 3.3.9. On montre facilement que notre notion d'intégrale oscillante ne dépend pas du choix de la famille de poids dominants $\hat{\underline{\mu}}$ ni du choix des opérateurs différentiels $\mathbf{D}_{\vec{r}_j}$. De plus, pour tout $F \in \mathcal{B}^{\hat{\underline{\mu}}}(G \times G, \mathcal{E})$, on a pour la topologie de \mathcal{E} :

$$\widetilde{\int_{G \times G} \mathbf{K}_\theta^G} (F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G \times G} \mathbf{K}_\theta^G(g, g') F_n(g, g') d_G(g) d_G(g'), \quad (3.3.15)$$

pour n'importe quelle suite $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $C_c^\infty(G \times G, \mathcal{E})$ qui converge vers F pour la topologie de $\mathcal{B}^{\hat{\underline{\mu}}}(G \times G, \mathcal{E})$ avec une famille quelconque de poids dominants $\hat{\underline{\mu}}$. Par contre, l'intégrale oscillante sur $\mathcal{B}^{\hat{\underline{\mu}}}(G \times G, \mathcal{E})$ n'est certainement pas l'unique extension continue de sa restriction à $C_c^\infty(G \times G, \mathcal{E})$.

3.4 Déformation des algèbres de Fréchet

Soit maintenant \mathcal{A} une algèbre de Fréchet munie d'une action isométrique α d'un groupe Kählérien de courbure négative G . Le but est de donner du sens à l'expression suivante :

$$a \star_{\theta}^{\alpha} b = \int_{G \times G} \mathbf{K}_{\theta}^G(g_1, g_2) \alpha_{g_1}(a) \alpha_{g_2}(b) d_G(g_1) d_G(g_2), \quad a, b \in \mathcal{A}^{\infty}.$$

D'après le Lemme 3.3.3 on sait que pour $a \in \mathcal{A}^{\infty}$, la fonction de G vers \mathcal{A}^{∞} $\alpha(a) = [g \mapsto \alpha_g(a)]$ appartient à $\mathcal{B}^{\underline{\nu}}(G, \mathcal{A}^{\infty})$, pour $\underline{\nu}$ une famille de poids tempérés sur G . Comme $a \star_{\theta}^{\alpha} b = \alpha(a) \star_{\theta} \alpha(b)(e)$, il suffit de donner du sens à l'expression

$$F_1 \star_{\theta} F_2 = \int_{G \times G} \mathbf{K}_{\theta}^G(g_1, g_2) (\rho_{g_1} F_1) (\rho_{g_2} F_2) d_G(g_1) d_G(g_2), \quad (3.4.1)$$

avec $F_j \in \mathcal{B}^{\underline{\mu}_j}(G, \mathcal{A})$, $j = 1, 2$, et $\underline{\mu}_j$ une famille de poids tempérés arbitraire. Tout d'abord, on montre que l'application

$$\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} : (F_1, F_2) \longmapsto \left[(g_1, g_2) \mapsto (\rho_{g_1} F_1)(\rho_{g_2} F_2) := [g \mapsto F_1(gg_1)F_2(gg_2)] \right], \quad (3.4.2)$$

envoie continûment $\mathcal{B}^{\underline{\mu}_1}(G, \mathcal{A}) \times \mathcal{B}^{\underline{\mu}_2}(G, \mathcal{A})$ sur $\mathcal{B}^{\underline{\lambda}}(G \times G, \mathcal{B}^{\underline{\lambda}}(G, \mathcal{A}))$, pour $\underline{\nu}, \underline{\lambda}$ des familles de poids tempérés. L'idée est de définir les intégrales intervenant dans l'expression (3.2.11) comme des intégrales au sens de la Définition 3.3.8 pour l'espace de Fréchet $\mathcal{E} = \mathcal{B}^{\underline{\lambda}}(G, \mathcal{A})$. La question restante est celle de l'associativité. Elle se démontre au niveau de $C_c^{\infty}(G)$ en utilisant l'associativité au niveau de $L_{\lambda}^2(G)$ (conséquence directe de la construction du calcul pseudo-différentiel) et s'étend aux espaces $\mathcal{B}^{\underline{\nu}}(G)$ par densité (Lemme 3.3.5). Plus précisément, on obtient :

Théorème 3.4.1. [8, Theorem 2.43] Soient $\underline{\mu}_1, \underline{\mu}_2$ deux familles de poids tempérés sur G et soit \mathcal{A} une algèbre de Fréchet. Avec $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$, l'application construite dans (3.4.2), l'intégrale oscillante

$$\star_{\theta} := \left[(F_1, F_2) \mapsto \widetilde{\int_{G \times G} \mathbf{K}_{\theta}^G \circ \mathcal{R} \otimes \mathcal{R} (F_1, F_2)} \right], \quad (3.4.3)$$

définit une application bilinéaire et continue de $\mathcal{B}^{\underline{\mu}_1}(G, \mathcal{A}) \times \mathcal{B}^{\underline{\mu}_2}(G, \mathcal{A})$ vers $\mathcal{B}^{\underline{\lambda}}(G, \mathcal{A})$, pour $\underline{\lambda}$ une famille de poids tempérés sur G . De plus, pour tout $(F_1, F_2, F_3) \in \mathcal{B}^{\underline{\mu}_1}(G, \mathcal{A}) \times \mathcal{B}^{\underline{\mu}_2}(G, \mathcal{A}) \times \mathcal{B}^{\underline{\mu}_3}(G, \mathcal{A})$, on a l'égalité

$$(F_1 \star_{\theta} F_2) \star_{\theta} F_3 = F_1 \star_{\theta} (F_2 \star_{\theta} F_3),$$

dans $\mathcal{B}^{\underline{\nu}}(G, \mathcal{A})$ pour une famille de poids tempéré $\underline{\nu}$ sur G . En particulier, on a un produit continu et associatif :

$$\star_{\theta} : \mathcal{B}(G, \mathcal{A}) \times \mathcal{B}(G, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}(G, \mathcal{A}).$$

Finalement, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G, \mathcal{A})$ donné dans (3.3.8) est un idéal bilatère de $(\mathcal{B}(G, \mathcal{A}), \star_{\theta})$.

En corollaire, on en déduit un résultat important :

Théorème 3.4.2. [8, Theorem 5.8] Soit (\mathcal{A}, α, G) une algèbre de Fréchet munie d'une action fortement continue et isométrique d'un groupe Kählérien de courbure négative. En posant

$$a \star_{\theta}^{\alpha} b := \left(\alpha(a) \star_{\theta} \alpha(b) \right)(e), \quad (3.4.4)$$

$(\mathcal{A}^{\infty}, \star_{\theta}^{\alpha})$ devient une algèbre de Fréchet associative.

Il y a une petite clarification que nous pouvons donner maintenant. Nous savons déjà que lorsque $\mathcal{A} = C_{ru}(G)$, la C^* -algèbre des fonctions bornées et uniformément continues à droite sur G , alors $\mathcal{A}^{\infty} = \mathcal{B}(G)$. Ainsi, il est naturel de se demander si le produit déformé (3.4.4) construit à l'aide de la représentation régulière droite (qui est fortement continue et isométrique) sur $C_{ru}(G)$, coïncide avec le produit (3.4.3) pour $\mathcal{A} = \mathbb{C}$. En fait, on peut montrer que pour $a, b \in \mathcal{A}^{\infty}$, on a

$$a \star_{\theta}^{\alpha} b = \int_{G \times G} \widetilde{\mathbf{K}_{\theta}^G}(\alpha(a, b)), \quad (3.4.5)$$

avec la notation

$$\alpha(a, b) : G \times G \rightarrow \mathcal{A}^{\infty} : (x, y) \mapsto \alpha_x(a) \alpha_y(b),$$

À partir de cela, on en déduit :

Corollaire 3.4.3. [8, Proposition 5.10 & Corollary 5.11] Pour $\mathcal{A} = C_{ru}(G)$ et $\alpha = \rho$, on a

$$(\mathcal{A}^{\infty}, \star_{\theta}^{\alpha}) = (\mathcal{B}(G), \star_{\theta}).$$

Pour conclure sur la déformation des algèbres de Fréchet, voici deux descriptions alternatives des algèbres que nous avons construit. La première explique que la déformation associée à l'action d'un groupe Kählérien de courbure négative coïncide avec les déformations itérées associées à chaque sous-groupe élémentaire.

Proposition 3.4.4. [8, Proposition 5.20] Soit G un groupe Kählérien de courbure négative de décomposition de Pyatetskii-Shapiro $G = G' \rtimes \mathbb{S}$, où G' est un groupe Kählérien de courbure négative et \mathbb{S} un groupe élémentaire. Soit aussi \mathcal{A} une algèbre de Fréchet munie d'une action α fortement continue et isométrique de G . En désignant par $\alpha^{G'}$ (respectivement par $\alpha^{\mathbb{S}}$) la restriction de α à G' (respectivement à \mathbb{S}) et pour \mathcal{C} un sous-espace de \mathcal{A} , en désignant par \mathcal{C}_G^{∞} (respectivement par $\mathcal{C}_{G'}^{\infty}$, par $\mathcal{C}_{\mathbb{S}}^{\infty}$) l'espace des vecteurs lisses \mathcal{C} pour l'action de G (respectivement de G' , de \mathbb{S}), on a

$$\left((\mathcal{A}_{\mathbb{S}}^{\infty}, \star_{\theta}^{\alpha^{\mathbb{S}}})_{G'}^{\infty}, \star_{\theta}^{\alpha^{G'}} \right) = (\mathcal{A}_G^{\infty}, \star_{\theta}^{\alpha}).$$

La seconde description permet de comprendre nos algèbres déformés comme des algèbres de points fixes.

Proposition 3.4.5. [8, Proposition 5.13] Soit (\mathcal{A}, α, G) une algèbre de Fréchet munie d'une action fortement continue et isométrique d'un groupe Kählérien de courbure négative. On a alors un isomorphisme isométrique d'algèbres de Fréchet :

$$(\mathcal{A}^{\infty}, \star_{\theta}^{\alpha}) \simeq (\mathcal{B}(G, \mathcal{A})^{\beta}, \star_{\theta}),$$

où le membre de droite désigne la sous-algèbre des points fixes pour l'action

$$(\beta_g F)(g_0) := \alpha_g(F(g^{-1}g_0)), \quad g, g_0 \in G.$$

3.5 Déformation des C^* -algèbres

Nous allons maintenant passer à la question du plongement de l'algèbre de Fréchet déformée dans une C^* -algèbre. Dans ce qui suit, nous prendrons comme cas particulier d'algèbre de Fréchet une C^* -algèbre A , toujours munie d'une action α isométrique et fortement continue d'un groupe Kählérien de courbure négative G . Rappelons que notre objectif est de définir une C^* -norme sur $(A^\infty, \star_\theta^\alpha)$ de manière à obtenir, après complétion, une théorie des déformations au niveau des C^* -algèbres. Pour cela, considérons \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable sur lequel A se représente fidèlement. Par la suite, nous identifierons A avec son image dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Soit $\mathcal{S}(G, A)$ l'espace des fonctions sur G à valeur sur A de type Schwartz, défini dans (3.3.8). Étant donné que $\mathcal{S}(G, A) \subset L_\lambda^2(G, A)$ et que la quantification Ω_θ^G est unitaire de $L_\lambda^2(G)$ vers $\mathcal{L}^2(L_\lambda^2(Q))$, il est facile de voir que l'application

$$f \in \mathcal{S}(G, A) \mapsto \Omega_\theta^G(f) := \int_G \Omega_\theta^G(x) \otimes f(x) d_G(x), \quad (3.5.1)$$

est bien définie, prend ses valeurs dans $\mathcal{K}(L_\lambda^2(Q_d \times \cdots \times Q_1)) \otimes A$ et est compatible avec l'involution :

$$\Omega_\theta^G(f)^* = \Omega_\theta^G(f^*) \quad \text{avec} \quad f^* := [g \mapsto f(g)^*] \in \mathcal{S}(G, A).$$

On sait par ailleurs (voir la Remarque 3.3.4), que pour $a \in A^\infty$, la fonction $\alpha(a) := [g \in G \mapsto \alpha_g(a)]$ appartient à $\mathcal{B}(G, A)$. Toute la question repose alors sur la construction d'une extension de $\mathcal{S}(G, A)$ vers $\mathcal{B}(G, A)$ de l'application (3.5.1). On disposera alors d'une pré- C^* -norme sur $(A^\infty, \star_\theta^\alpha)$, en posant

$$\|a\|_\theta := \left\| \Omega_\theta^G(\alpha(a)) \right\|,$$

où la norme dans le membre de droite est la C^* -norme du produit tensoriel minimal de A avec $\mathcal{B}(L_\lambda^2(Q_d) \otimes \cdots \otimes L_\lambda^2(Q_1))$. Notre approche pour construire cette extension s'appuie sur des méthodes d'états cohérents et de fonctions de Wigner. Le résultat suivant est une version du résultat classique de Duflo et Moore [35] dans un cas réductible. Commençons par définir la notion d'états cohérents pour G :

Définition 3.5.1. *Soit G un groupe Kählérien de courbure négative. Pour un élément $\eta \in \mathcal{D}(Q_d \times \cdots \times Q_1)$, soit $\{\eta_x\}_{x \in G}$ la famille d'états cohérents définis par*

$$\eta_x := U_\theta(x)\eta, \quad x \in G,$$

où U_θ est la représentation unitaire, irréductible et de carré intégrable de G sur $\mathcal{H}_\chi := L_\lambda^2(Q_d \times \cdots \times Q_1)$ construite dans (3.2.13) pour le morphisme (3.2.12).

La famille d'états cohérents $\{\eta_x\}_{x \in G}$ permet d'obtenir une résolution de l'identité au sens faible :

Proposition 3.5.2. *[8, Proposition 8.6] Soit G un groupe Kählérien de courbure négative, \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable et $\eta \in \mathcal{D}(Q_d \times \cdots \times Q_1) \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}_\chi \otimes \mathcal{H}$, la relation suivante est satisfaite :*

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}_\chi \otimes \mathcal{H}} = C(\eta)^{-1} \int_G \left\langle \langle \eta_x, \Psi \rangle_{\mathcal{H}_\chi}, \langle \eta_x, \Phi \rangle_{\mathcal{H}_\chi} \right\rangle_{\mathcal{H}} d_G(x),$$

où $\langle \eta_x, \Psi \rangle_{\mathcal{H}_x}$ est le vecteur de \mathcal{H} défini par :

$$\langle \varphi, \langle \eta_x, \Psi \rangle_{\mathcal{H}_x} \rangle_{\mathcal{H}} := \langle \eta_x \otimes \varphi, \Psi \rangle_{\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H},$$

et la constante $C(\eta)$ est donnée par

$$(2\pi\theta)^{\dim(G)/2} \|\Delta_{Q_d} \otimes \cdots \otimes \Delta_{Q_1} \eta\|_2^2,$$

avec Δ_{Q_j} la fonction modulaire de Q_j .

L'existence d'une résolution de l'identité permet d'obtenir le résultat suivant qui est à la base d'une estimation du type Calderón-Vaillancourt, elle-même étant à la base de la construction de l'extension de l'application (3.5.1) :

Proposition 3.5.3. [8, Lemma 8.9] Soit G un groupe Kählérien de courbure négative, \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, $\eta \in \mathcal{D}(Q_d \times \cdots \times Q_1) \setminus \{0\}$ et T un opérateur densément défini sur $\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}$, dont le domaine contient le produit tensoriel algébrique $\mathcal{D}(Q_d \times \cdots \times Q_1) \otimes \mathcal{H}$. Si on a

$$C_1 := \sup_{y \in G} \int_G \|\langle \eta_x, T\eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} d_G(x) < \infty, \quad C_2 := \sup_{x \in G} \int_G \|\langle \eta_x, T\eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} d_G(y) < \infty,$$

alors T s'étend en un opérateur borné sur $\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}$ avec $\|T\| \leq \sqrt{C_1 C_2}$.

Ainsi, tout ce dont nous avons besoin pour étendre Ω_θ^G de $\mathcal{S}(G, A)$ à $F \in \mathcal{B}(G, A)$, c'est de définir les coefficients matriciaux $\langle \eta_x, \Omega_\theta^G(F)\eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x}$, $x, y \in G$, $F \in \mathcal{B}(G, A)$, et de montrer que les applications

$$\left[x \in G \mapsto \left[y \in G \mapsto \langle \eta_x, \Omega_\theta^G(F)\eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x} \right] \right], \quad \left[x \in G \mapsto \left[y \in G \mapsto \langle \eta_y, \Omega_\theta^G(F)\eta_x \rangle_{\mathcal{H}_x} \right] \right],$$

appartiennent à $L^\infty(G, L^1(G, A))$. En utilisant deux fois la résolution de l'identité donnée dans la Proposition 3.5.2, l'opérateur $\Omega_\theta^G(F)$ sera alors défini par la forme quadratique $\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}$:

$$\langle \Phi, \Omega_\theta^G(F)\Psi \rangle_{\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}} = \int_{G \times G} \left\langle \langle \eta_x, \Phi \rangle_{\mathcal{H}_x}, \langle \eta_x, \Omega_\theta^G(F)\eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x} \langle \eta_y, \Psi \rangle_{\mathcal{H}_x} \right\rangle_{\mathcal{H}} d_G(x) d_G(y). \quad (3.5.2)$$

Pour donner un sens à ces coefficients matriciaux, procédons tout d'abord formellement. En partant de l'expression explicite des opérateurs $\Omega_\theta^G(x)$ (voir Théorème 3.2.8 (i)), en utilisant la covariance sous l'action à gauche de G et en permutant (formellement) les intégrales, on arrive à

$$\begin{aligned} \langle \eta_x, \Omega_\theta^G(F)\eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x} &= \mathcal{T}_\eta \left(\int_{\mathbb{S}_1} \mathbf{E}_\theta^{\mathbb{S}_1}(g_1) \mathbf{m}_{0,1}(q_1^{-1}) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \left(\int_{\mathbb{S}_d} \mathbf{E}_\theta^{\mathbb{S}_d}(g_d) \mathbf{m}_{0,d}(q_d^{-1}) \mathcal{R}_\eta(L_{y^{-1}}^* F)(g_d, \dots, g_1; \cdot) d_{\mathbb{S}_d}(g_d) \right) \dots d_{\mathbb{S}_1}(g_1) \right) (y^{-1}x), \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

où, pour \mathbb{S} un groupe élémentaire, la phase à un point $\mathbf{E}_\theta^{\mathbb{S}}$ (voir Définition 3.2.2) est donnée par :

$$\mathbf{E}_\theta^{\mathbb{S}}(qb) = \bar{\chi}_\theta \left(\mathbf{C}_q(b^{-1}\tilde{\sigma}b) \right) =: e^{i\theta^{\mathbf{S}}(qb)}, \quad (3.5.4)$$

et, pour $\eta \in C_c^\infty(Q_d \times \cdots \times Q_1)$, nous avons défini les opérateurs linéaires \mathcal{T}_η et \mathcal{R}_η par :

$$\mathcal{T}_\eta : L_\lambda^2(Q_d \times \cdots \times Q_1, A) \rightarrow L^\infty(G, A), \quad f \mapsto [x \in G \mapsto \langle \eta_x, f \rangle], \quad (3.5.5)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\eta : C^\infty(G, A) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{S}_d, C^\infty(\mathbb{S}_{d-1}, \dots, C^\infty(\mathbb{S}_1, C^\infty(Q_d \times \cdots \times Q_1, A)) \dots)), \\ F &\mapsto \left[q_d b_d \in \mathbb{S}_d \mapsto \left[q_{d-1} b_{d-1} \in \mathbb{S}_{d-1} \mapsto \dots \left[q_1 b_1 \in \mathbb{S}_1 \mapsto \left[(q'_d, \dots, q'_1) \in Q_d \times \cdots \times Q_1 \mapsto \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. F(q'_1 q_1 b_1 \dots q'_{d-1} q_{d-1} b_{d-1} q'_d q_d b_d) \eta(q'_d \underline{s}_{q_d}(e), \dots, q'_1 \underline{s}_{q_1}(e)) \in A \right] \dots \right] \right], \end{aligned}$$

Pour énoncer les propriétés fondamentales des opérateurs \mathcal{T}_η et \mathcal{R}_η , nous avons besoin d'introduire un dernier espace de symboles qui n'est défini que pour un groupe élémentaire \mathbb{S} et qui est associé à la décomposition $\mathbb{S} = Q \times \mathbb{Y}$ donnée dans (3.1.13). Soient encore \mathcal{E} un espace de Fréchet, $\underline{\mu} = \{\mu_j\}_{j \in J}$ une famille de poids tempérés sur \mathbb{S} et soit aussi ν un poids tempéré sur \mathbb{S} et invariant par translations à droite dans \mathbb{Y} . On définit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\underline{\mu}, \nu}(\mathbb{S}, \mathcal{E}) := \left\{ F \in C^\infty(\mathbb{S}, \mathcal{E}) : \forall (j, X, Y) \in J \times \mathcal{U}(\mathfrak{q}) \times \mathcal{U}(\mathfrak{Y}), \exists C : \right. & \quad (3.5.6) \\ & \left. \|\tilde{X} \tilde{Y} F(qb)\|_j \leq C \mu_j(qb) \nu(q)^{\deg(X)} \right\}. \end{aligned}$$

Cet espace se comprend comme une variante de l'espace $\mathcal{B}^{\underline{\mu}}(\mathbb{S}, \mathcal{E})$, où une dépendance spécifique de la famille de poids $\underline{\mu}$ dans l'ordre des dérivations est permise. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.5.4. [8, Proposition 8.3 & Lemma 8.18] *Soit G un groupe Kählérien de courbure négative, \mathcal{E} un espace de Fréchet et η un élément de $\mathcal{D}(Q_d \times \cdots \times Q_1)$.*

- (i) *L'application linéaire \mathcal{T}_η est continue de $\mathcal{S}(Q_d \times \cdots \times Q_1, \mathcal{E})$ vers $L^1(G, \mathcal{E})$.*
- (ii) *L'application linéaire \mathcal{R}_η est continue de $\mathcal{B}(G, A)$ vers*

$$\mathcal{B}^{\underline{\mu}, \nu_d}(\mathbb{S}_d, \mathcal{B}^{\underline{\mu}_{d-1}, \nu_{d-1}}(\mathbb{S}_{d-1}, \dots, \mathcal{B}^{\underline{\mu}_1, \nu_1}(\mathbb{S}_1, \mathcal{S}(Q_d \times \cdots \times Q_1, A)) \dots)),$$

où :

$$\nu_j := \mathfrak{d}_{Q_j}^2, \quad \underline{\mu}_j := \left\{ \mathfrak{d}_{\mathbb{S}_j}^{n_j(k_{j-1}, l_{j-1}; \dots; k_1, l_1; k, l)} \right\}_{(k_{j-1}, l_{j-1}; \dots; k_1, l_1; k, l) \in \mathbb{N}^{2j}}, \quad j = d, \dots, 1.$$

Retournons à l'expression (3.5.3), dans laquelle nous pouvons supposer que F est à valeurs dans A_{sa} . Ce que nous devons établir, c'est alors

$$\sup_{y \in G} \int_G \|\langle \eta_x, \mathbf{\Omega}_\theta(F) \eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x}\| d_G(x) < \infty.$$

Étant donné que les semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{B}(G, A)$ sont invariantes par translations à gauche, au vu de l'expression (3.5.3) il est clair que l'uniformité dans la variable y sera satisfaite. En utilisant la Proposition 3.5.4, on voit que la difficulté restante est de donner un sens oscillant aux intégrales contre les phases $\mathbf{E}_\theta^{\mathbb{S}_j}$ et de montrer que cette intégrale oscillante envoie $\mathcal{B}^{\underline{\mu}, \nu}(\mathbb{S}, \mathcal{E})$ sur \mathcal{E} continûment. Cela fait suite au fait que la phase $\mathbf{S} \in C^\infty(\mathbb{S}, \mathbb{R})$ satisfait à des propriétés analogues à celles données dans les Propositions 3.3.1 et 3.3.6 (avec \mathbb{S} à la place de $G \times G$). Plus précisément, on montre le résultat suivant :

Proposition 3.5.5. [8, Theorem 8.17] Soit $\underline{\mu}$ une famille de poids tempérés sur \mathbb{S} , ν un poids tempéré et invariant par translations à droite dans \mathbb{Y} sur \mathbb{S} et \mathcal{E} un espace de Fréchet de topologie associée aux semi-normes $\{\|\cdot\|_j\}_{j \in J}$. Alors, pour tout $j \in J$, il existe un opérateur différentiel \mathbf{D}_j tel que pour tout $F \in \mathcal{B}^{\underline{\mu}, \nu}(\mathbb{S}, \mathcal{E})$, on a

$$\int_{\mathbb{S}} \|\mathbf{D}_{\bar{r}} \mathbf{m}_0(g) F(g)\|_j \, d_{\mathbb{S}}(g) \leq C_j \|F\|_{j, k_j, l_j, \underline{\mu}, \nu}.$$

Ainsi, on obtient une application continue (voir Définition 3.3.8) :

$$\widetilde{\int_{\mathbb{S}} \mathbf{m}_0 \mathbf{E}_{\theta}^{\mathbb{S}}} : \mathcal{B}^{\underline{\mu}, \nu}(\mathbb{S}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E},$$

que nous appellerons l'intégrale oscillante pour la phase $\mathbf{E}_{\theta}^{\mathbb{S}}$.

En combinant les Propositions 3.5.4 et 3.5.5, nous obtenons une version courbe et à valeurs dans une C^* -algèbre du Théorème de Calderón-Vaillancourt :

Théorème 3.5.6. [8, Theorem 8.20] Soient G un groupe Kählérien de courbure négative, A une C^* -algèbre fidèlement représentée sur un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} , $F \in \mathcal{B}(G, A)$ et $\eta \in \mathcal{D}(Q_d \times \cdots \times Q_1)$. Pour $x, y \in G$, définissons l'élément de A par

$$\begin{aligned} \langle \eta_x, \mathbf{\Omega}_{\theta}^G(F) \eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x} &:= \mathcal{T}_{\eta} \left(\widetilde{\int_{\mathbb{S}_1} \mathbf{E}_{\theta}^{\mathbb{S}_1} \hat{\mathbf{m}}_1} \dots \right. \\ &\dots \left. \left(\widetilde{\int_{\mathbb{S}_d} \mathbf{E}_{\theta}^{\mathbb{S}_d} \hat{\mathbf{m}}_d} \left[g_d \in \mathbb{S}_d \mapsto \dots \left[g_1 \in \mathbb{S}_1 \mapsto \mathcal{R}_{\eta} \left(L_{y^{-1}}^* F \right) (g_d, \dots, g_1; \cdot) \right] \dots \right] \right) \dots \right) (y^{-1}x), \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

où $\hat{\mathbf{m}}_j(qb) = \mathbf{m}_{0,j}(q^{-1})$ et $\mathbf{E}_{\theta}^{\mathbb{S}_j}$ est la phase à un point de \mathbb{S}_j donné dans (3.5.4). On a alors :

$$\sup_{x \in G} \int_G \|\langle \eta_x, \mathbf{\Omega}_{\theta}^G(F) \eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x}\| \, d_G(y) < \infty, \quad \sup_{y \in G} \int_G \|\langle \eta_x, \mathbf{\Omega}_{\theta}^G(F) \eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x}\| \, d_G(x) < \infty.$$

Ainsi, l'opérateur $\mathbf{\Omega}_{\theta}^G(F)$ sur $\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}$ défini à partir de la forme quadratique

$$(\Psi, \Phi) \in (\mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H})^2 \mapsto \int_{G \times G} \langle \langle \eta_x, \Psi \rangle_{\mathcal{H}_x}, \langle \eta_x, \mathbf{\Omega}_{\theta}^G(F) \eta_y \rangle_{\mathcal{H}_x} \langle \eta_y, \Psi \rangle_{\mathcal{H}_x} \rangle_{\mathcal{H}} \, d_G(x) \, d_G(y),$$

est borné. De plus, il existe $k \in \mathbb{N}$ (dépendant de la dimension de G seulement) et $C > 0$ tels que pour tout $F \in \mathcal{B}(G, A)$ on a :

$$\|\mathbf{\Omega}_{\theta}^G(F)\| \leq C \|F\|_{k, \infty}.$$

En utilisant le plongement donné dans Remarque 3.3.4 :

$$\alpha : A^{\infty} \rightarrow \mathcal{B}(G, A), \quad a \mapsto \alpha(a) = [g \mapsto \alpha_g(a)],$$

ainsi que les relations

$$\mathbf{\Omega}_{\theta}^G(\alpha(a^* \star_{\theta}^{\alpha} b)) = \mathbf{\Omega}_{\theta}^G(\alpha(a))^* \mathbf{\Omega}_{\theta}^G(\alpha(b)), \quad \forall a, b \in A^{\infty},$$

le Théorème 3.5.6 montre que nous avons une C^* -norme sur $(A^{\infty}, \star_{\theta}^{\alpha})$:

$$\|a\|_{\theta} := \|\mathbf{\Omega}_{\theta}^G(\alpha(a))\|. \quad (3.5.8)$$

En résumé, nous avons obtenu :

Théorème 3.5.7. [8, Proposition 8.26] Soit (A, α, G) une C^* -algèbre munie d'une action isométrique et fortement continue d'un groupe Kählérien de courbure négative. Alors, il existe une C^* -norme sur l'algèbre de Fréchet déformée $(A^\infty, \star_\theta^\alpha)$. Son adhérence en norme est appelée la C^* -déformation de A et est notée A_θ .

3.6 Propriétés de la déformation

Nous allons maintenant passer en revue certaines propriétés de la C^* -déformation. Tout d'abord, et de façon analogue à la Proposition 3.4.4, on peut montrer que la déformation associée à l'action d'un groupe Kählérien de courbure négative coïncide avec les C^* -déformations itérées de chacun de ses sous-groupes élémentaires. Fixons G un groupe Kählérien de courbure négative de décomposition de Pyatetskii-Shapiro donnée par $G = G' \times \mathbb{S}$ et A une C^* -algèbre munie d'une action α fortement continue et isométrique de G . Bien évidemment $\alpha^\mathbb{S}$, la restriction de α au sous-groupe \mathbb{S} , est aussi fortement continue et isométrique. Ainsi, nous pouvons construire la déformation de A pour l'action $\alpha^\mathbb{S}$ de \mathbb{S} , déformation que nous noterons $A_\theta^\mathbb{S}$. On montre alors que G' agit fortement continûment par isométries sur $A_\theta^\mathbb{S}$. En effet, on a montré dans la Proposition 3.4.4 que le sous-espace des vecteurs lisses pour G coïncide avec le sous-espace des vecteurs lisses pour G' , à l'intérieur du sous-espace des vecteurs lisses pour \mathbb{S} . Ainsi A^∞ , le sous-espace des vecteurs lisses pour G dans A est dense dans $A_\theta^\mathbb{S}$. Étant donné que l'action de G' est fortement continue sur A^∞ , on en déduit le résultat par densité. On peut donc produire la C^* -déformation de $A_\theta^\mathbb{S}$ en utilisant l'action de G' . On note cette C^* -algèbre $(A_\theta^\mathbb{S})_\theta^{G'}$. Évidemment on peut aussi produire la C^* -déformation de A en utilisant l'action de G directement. On notera cette déformation par A_θ^G . En utilisant la Proposition 3.4.4, on sait qu'au niveau de A^∞ les deux constructions coïncident. Pour conclure, il suffit de montrer que les C^* -normes de $(A_\theta^\mathbb{S})_\theta^{G'}$ et de A_θ^G coïncident sur A^∞ . Mais cette propriété est automatique au vu de notre construction. Ainsi, on obtient :

Proposition 3.6.1. [8, Proposition 8.28] Soit G un groupe Kählérien de courbure négative de décomposition de Pyatetskii-Shapiro $G = G' \times \mathbb{S}$, où G' est un groupe Kählérien de courbure négative et \mathbb{S} un groupe élémentaire. Soit A une C^* -algèbre munie d'une action α fortement continue et isométrique de G . Avec les notations précédentes, on a :

$$A_\theta^G = (A_\theta^\mathbb{S})_\theta^{G'}.$$

Nous allons montrer maintenant que la C^* -norme déformée coïncide aussi avec la C^* -norme des endomorphismes adjointables et bornés d'un C^* -module pour A , ce qui clarifiera l'analogie entre notre construction et celle de Rieffel [80].

Définition 3.6.2. Pour f_1, f_2 dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G, A)$, on définit le produit scalaire à valeurs dans A suivant :

$$\langle f_1, f_2 \rangle_\theta := \int \langle \eta_g, \Omega_\theta^G(f_1^* \star_\theta f_2) \eta_g \rangle d_G(g), \quad (3.6.1)$$

où $\{\eta_g\}_{g \in G} \subset \mathcal{H}_\chi$ est la famille d'états cohérents donnée dans la Définition 3.5.1.

Munie de ce produit scalaire et de l'action

$$\mathcal{S}(G, A) \times A \rightarrow \mathcal{S}(G, A), \quad (f, a) \mapsto [g \in G \mapsto f(g)a],$$

l'espace $\mathcal{S}(G, A)$ devient un pré- C^* -module à droite pour la C^* -algèbre A . Définissons ensuite pour $F \in \mathcal{B}(G, A)$ l'opérateur $L^\theta(F)$ sur $\mathcal{S}(G, A)$ donné par $L^\theta(F)f = F \star_\theta f$. D'après la Proposition 3.4.1, on sait que l'opérateur $L^\theta(F)$, $F \in \mathcal{B}(G, A)$, agit continûment sur $\mathcal{S}(G, A)$. Il est aussi facile de montrer que cet opérateur est adjointable, d'adjoint donné par $L^\theta(F^*)$. Cet opérateur est aussi borné. En effet, en utilisant l'inégalité d'opérateurs sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\chi) \otimes A$:

$$\Omega_\theta^G(f^* \star_\theta F^* \star_\theta F \star_\theta f) \leq \|\Omega_\theta^G(F)\|^2 \Omega_\theta^G(f^* \star_\theta f),$$

on en déduit l'inégalité d'opérateurs sur A :

$$\langle L^\theta(F)f, L^\theta(F)f \rangle_\theta \leq \|\Omega_\theta^G(F)\|^2 \langle f, f \rangle_\theta.$$

Ainsi, pour $F \in \mathcal{B}(G, A)$, l'opérateur $L^\theta(F)$ appartient à la C^* -algèbre des endomorphismes A -linéaires, adjointables et bornés du pré- C^* -module $\mathcal{S}(G, A)$, et on a

$$\|L^\theta(F)\| \leq \|\Omega_\theta^G(F)\|. \quad (3.6.2)$$

Mais on a aussi l'inégalité inverse,

$$\|L^\theta(F)\| \geq \|\Omega_\theta^G(F)\|, \quad (3.6.3)$$

car la norme $\|\Omega_\theta^G(\cdot)\|$ restreinte au produit tensoriel algébrique $\mathcal{B}(G) \otimes_{\text{alg}} A \subset \mathcal{B}(G, A)$, coïncide par construction avec la C^* -norme minimale sur le produit tensoriel algébrique de la C^* -algèbre engendrée par les opérateurs $\Omega_\theta^G(F)$, $F \in \mathcal{B}(G, A)$, avec A . Nous déduisons ainsi une autre expression pour la C^* -norme déformée :

Proposition 3.6.3. [8, Theorem 8.33] *Soit (A, α, G) une C^* -algèbre munie d'une action fortement continue et isométrique d'un groupe Kählérien de courbure négative. La C^* -norme sur $(A^\infty, \star_\theta^\alpha)$ donnée par $a \in A^\infty \mapsto \|L^\theta(\alpha(a))\|$ coïncide avec la C^* -norme déformée $\|\cdot\|_\theta$ donnée dans (3.5.8).*

Pour conclure, nous allons montrer que la K -théorie est un invariant de cette déformation :

Théorème 3.6.4. [8, Theorem 8.50] *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, on a $K_*(A_\theta) \simeq K_*(A)$, $*$ = 0, 1.*

Pour expliquer les arguments permettant d'obtenir ce résultat, définissons $\overline{\mathcal{B}}_\theta(G, A)$ et $\overline{\mathcal{S}}_\theta(G, A)$ comme étant les C^* -complétions des algèbres de Fréchet $(\mathcal{B}(G, A), \star_\theta)$ et $(\mathcal{S}(G, A), \star_\theta)$ pour la C^* -norme déformée $\|\cdot\|_\theta$. On munit $\overline{\mathcal{B}}_\theta(G, A)$ de l'action β de G , définie au niveau de $\mathcal{B}(G, A)$ par :

$$(\beta_g F)(g_0) := \alpha_g(F(g^{-1}g_0)). \quad (3.6.4)$$

Il est facile de voir que β est isométrique sur $\overline{\mathcal{B}}_\theta(G, A)$ et que sa restriction à $\overline{\mathcal{S}}_\theta(G, A)$ est fortement continue. D'après la Proposition 3.2.8 (ii), on sait aussi que $\overline{\mathcal{S}}_\theta(G, A)$ est isomorphe à $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\chi) \otimes A$. Le Théorème 3.6.4 se déduit alors de l'isomorphisme de Connes-Thom ainsi que de l'équivalence de Morita suivante :

Théorème 3.6.5. [8, Corollary 8.49] *La C^* -algèbre déformée A_θ est fortement Morita équivalente au produit croisé $G \rtimes_\beta \overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$.*

Ce résultat se démontre en suivant les méthodes développées dans [81], lesquelles sont basées sur les constructions de [79]. La première étape consiste à montrer que l'action β est propre :

Proposition 3.6.6. [8, Proposition 8.45] *Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G, A^\infty)$, les applications*

$$\left[g \in G \mapsto \Delta_G(g)^{-1/2} f_1 \star_\theta \beta_g(f_2^*) \right] \quad \text{et} \quad \left[g \in G \mapsto f_1 \star_\theta \beta_g(f_2^*) \right],$$

sont dans $L^1(G, \overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A))$. De plus, l'application

$$\Lambda_{f_1, f_2} : \mathcal{S}(G, A^\infty) \rightarrow \mathcal{S}(G, A^\infty), \quad f \mapsto \int_G f \star_\theta \beta_g(f_1^* \star_\theta f_2) d_G(g),$$

appartient à la sous-algèbre de la C^ -algèbre des multiplicateurs de $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$, formée des éléments β -invariants et préservant $\mathcal{S}(G, A^\infty)$. Comme que $\mathcal{S}(G, A^\infty)$ est une sous-algèbre dense et stable sous β de $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$, on en déduit que l'action β de G sur $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$ est propre dans le sens de [79].*

La sous- C^* -algèbre de $M(\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A))$ engendrée par les applications Λ_{f_1, f_2} est appelée l'algèbre des points fixes généralisés de $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$ et se note $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)^\beta$. D'après [79, Theorem 1.5], $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)^\beta$ est fortement Morita équivalente à la sous- C^* -algèbre du produit croisé $G \rtimes_{\hat{\alpha}} \overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$, engendrée par les éléments

$$\left\{ \left[g \in G \mapsto \Delta(g)^{-1/2} f_1 \star_\theta \beta_g(f_2^*) \in \mathcal{S}(G, A^\infty) \right] : f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G, A^\infty) \right\}, \quad (3.6.5)$$

et le bi-module d'équivalence est $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$ lui-même. On montre facilement que $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)^\beta$ est isomorphe à A_θ . Le Théorème 3.6.5 (et donc le Théorème 3.6.4) se déduit alors du fait que l'action β de G sur $\overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$ est saturée, ce qui signifie que l'algèbre de convolution engendrée par les éléments donnés dans (3.6.5), est dense dans la C^* -algèbre (réduite) du produit croisé $G \rtimes_\beta \overline{\mathcal{S}_\theta}(G, A)$. Cette propriété vient essentiellement de la formule d'inversion suivante :

Proposition 3.6.7. [8, Proposition 8.47] *Soient G un groupe Kählérien de courbure négative et $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G, A^\infty)$. On a alors la représentation absolument convergente pour chaque semi-norme $\|\cdot\|_{j,k,n}$ (3.3.9) :*

$$\int_{G \times G} \mathbf{K}_{-\theta}^G(x_1, x_2) \left(\rho_{x_1^{-1}} f_1 \right) \star_\theta \left(\rho_{x_2^{-1}} f_2 \right) d_G(x_1) d_G(x_2) = f_1 f_2.$$

3.7 Groupes Kählériens quantiques

Mentionnons finalement l'existence de groupes quantiques Kählériens (dans le cadre des algèbres de von Neumann) associés à notre construction. Cela fait suite aux résultats de De Commer [30] ainsi qu'à l'observation de Neshveyev et Tuset suivante :

Proposition 3.7.1. [70, Section 5] *Soit G un groupe Kählérien de courbure négative $\theta \in \mathbb{R}^*$. L'opérateur suivant définit un 2-cocycle unitaire pour $W^*(G)$, l'algèbre de von Neumann de groupe :*

$$F_\theta := \int_{G \times G} \overline{\mathbf{K}_\theta^G}(g_1, g_2) \lambda_{g_1^{-1}} \otimes \lambda_{g_2^{-1}} d^\lambda(g_1) d^\lambda(g_2).$$

Chapitre 4

Groupes Abéliens p -adiques

Le but de ce chapitre est de montrer que la théorie de Rieffel s'étend aussi dans un cadre non Lie. Dans un premier temps nous considérons le cas Abélien où $G = \mathbf{k}^d$, avec \mathbf{k} un corps local non Archimédien de caractéristique différente de 2. Le cas non Abélien du groupe affine d'un corps local est à l'étude.

4.1 Le calcul de Weyl p -adique

Depuis les travaux de Segal [83] et Weil [92], on sait construire un calcul de Weil sur tout groupe Abélien localement compact de la forme $G = H \times \widehat{H}$. Cette construction repose essentiellement sur les propriétés de la transformée de Fourier $L^2(H) \rightarrow L^2(\widehat{H})$ ainsi que sur les représentations du groupe de Heisenberg associé. À ce niveau de généralités, les propriétés fines de ce calcul sont très mal comprises. Ce n'est pas le cas lorsque H est une puissance d'un corps local non Archimédien \mathbf{k} . Motivés par des questions en théorie des nombres, Haran [48] et Unterberger [90] ont étudié en détail ce calcul. En particulier, Bechata [4], un étudiant d'Unterberger, a obtenu une inégalité de type Calderón-Vaillancourt par la méthode des états cohérents (voir paragraphe 2.2.3).

Soit \mathbf{k} un corps local non Archimédien. On note $|\cdot|_{\mathbf{k}}$ la valeur absolue, $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}$ l'anneau des entiers, ϖ son uniformisante et dx la mesure de Haar auto-duale. On note aussi $\mathcal{D}(\mathbf{k}^d)$ l'espace des fonctions tests au sens de Bruhat (localement constantes à support compact), $\mathcal{D}'(\mathbf{k}^d)$ l'espace dual (fort) des distributions et $\mathcal{E}(\mathbf{k}^d)$ l'espace des fonctions régulières (localement constantes). On note \mathcal{F} la transformée de Fourier sur \mathbf{k}^d et \mathcal{G} sa variante symplectique sur \mathbf{k}^{2d} . Notons que \mathcal{F} et \mathcal{G} préservent $\mathcal{D}(\mathbf{k}^d)$ et $\mathcal{D}(\mathbf{k}^{2d})$. On fixe aussi Ψ un caractère unitaire non trivial de \mathbf{k} et on note $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}^{\Psi} = \varpi^{n(\Psi)}\mathcal{O}_{\mathbf{k}}$ son conducteur. On utilisera finalement les notations $|x|_{\mathbf{k}}^{\vee} = |x\varpi^{-n(\Psi)}|_{\mathbf{k}}$, $|x|_{\mathbf{k}^d} = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|_{\mathbf{k}}$, $|x|_{\mathbf{k}^d}^{\vee} = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|_{\mathbf{k}}^{\vee}$ et pour $X = (x, \xi), Y = (y, \eta) \in \mathbf{k}^{2d}$, $[X, Y] := \langle y, \xi \rangle - \langle x, \eta \rangle$ avec $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^d x_j y_j$.

Le quantification de Weyl p -adique Ω_{θ} est définie pour un paramètre $\theta \in \mathbf{k}^{\times}$ comme l'application linéaire continue de $\mathcal{D}'(\mathbf{k}^{2d})$ vers $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{k}^d), \mathcal{D}'(\mathbf{k}^d))$ qui à une distribution T associe l'opérateur $\Omega_{\theta}(T)$ donné (avec des petits abus de notations) par

$$\Omega_{\theta}(T)\varphi(x) = |\theta|_{\mathbf{k}}^{-d} \int_{\mathbf{k}^{2d}} T(x+y, \eta) \varphi(y) \Psi(\theta^{-1}\langle x-y, \eta \rangle) d\eta dy. \quad (4.1.1)$$

On sait aussi que Ω_{θ} réalise une isométrie surjective de $L^2(\mathbf{k}^{2d})$ vers $\mathcal{L}^2(L^2(\mathbf{k}^d))$ si et seulement si la caractéristique de \mathbf{k} est différente de 2, ce que nous supposons à présent.

Pour $F \in L^1(\mathbf{k}^{2d}) \cap L^2(\mathbf{k}^{2d})$, on peut écrire la quantification sous une forme intégrale :

$$\Omega_\theta(F) = \left| \frac{2}{\theta} \right|_{\mathbf{k}}^d \int_{\mathbf{k}^{2d}} F(X) U_\theta(X) \Sigma U_\theta(X)^* dX, \quad (4.1.2)$$

où U_θ est la représentation projective de \mathbf{k}^{2d} sur $L^2(\mathbf{k}^d)$ donnée par

$$U_\theta(X)\varphi(y) := \Psi\left(\theta^{-1}\langle \xi, y - \frac{1}{2}x \rangle\right) \varphi(y - x), \quad (4.1.3)$$

et Σ est l'involution sur $L^2(\mathbf{k}^d)$ donnée par $\Sigma\varphi(x) = \varphi(-x)$. Sur $L^1(\mathbf{k}^{2d}) \cap L^2(\mathbf{k}^{2d})$, on a la formule de composition des symboles :

$$f_1 \star_\theta f_2(X) = \left| \frac{2}{\theta} \right|_{\mathbf{k}}^{2d} \int_{\mathbf{k}^{2d} \times \mathbf{k}^{2d}} \overline{\Psi}\left(\frac{2}{\theta}[Y - X, Z - X]\right) f_1(Y) f_2(Z) dY dZ.$$

Cependant, pour pouvoir se servir de θ comme paramètre de déformation, il est préférable de réécrire la formule précédente sous la forme :

$$f_1 \star_\theta f_2 = \left| 2 \right|_{\mathbf{k}}^{2d} \int_{\mathbf{k}^{2d} \times \mathbf{k}^{2d}} \overline{\Psi}(2[Y, Z]) \tau_{\theta Y}(f_1) \tau_Z(f_2) dY dZ. \quad (4.1.4)$$

Il est maintenant clair que cette formule a du sens même pour $\theta = 0$, avec $f_1 \star_{\theta=0} f_2 = f_1 f_2$.

Deux opérateurs vont jouer un rôle important par la suite. Le premier est l'opérateur I de multiplication par la fonction

$$\mu_0(X) := \max\{1, |x|_{\mathbf{k}^d}, |\xi|_{\mathbf{k}^d}^\vee\}, \quad X = (x, \xi) \in \mathbf{k}^{2d}.$$

Le deuxième est l'opérateur J de convolution par la distribution $\mathcal{G}(\mu_0)$. Ces opérateurs préservent le domaine commun $\mathcal{D}(\mathbf{k}^{2d}) \subset L^2(\mathbf{k}^{2d})$, sont essentiellement auto-adjoints, positifs et d'inverse bornée. Étant donné que μ_0 est invariante par translations sur $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}^d \times \mathcal{O}_{\mathbf{k}}^{od}$, $\mathcal{G}(\mu_0)$ est supportée sur $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}^d \times \mathcal{O}_{\mathbf{k}}^{od}$, ce qui entraîne que les opérateurs I et J commutent. Ce fait va rendre l'analyse sous-jacente à notre construction encore plus simple que dans le cas Archimédien traité par Rieffel [80].

Les opérateurs I et J vont permettre de définir deux espaces fonctionnels importants. Le premier est un espace du type Schwartz :

$$\mathcal{S}(\mathbf{k}^{2d}) := \left\{ \varphi \in L^2(\mathbf{k}^{2d}) : \forall n, m \in \mathbb{N}, I^n J^m \varphi \in L^2(\mathbf{k}^{2d}) \right\}.$$

Cet espace est Fréchet et nucléaire. Sont dual (fort), l'espace des distributions tempérées, sera noté $\mathcal{S}'(\mathbf{k}^{2d})$. Le deuxième espace de Fréchet important est le suivant :

$$\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}) := \left\{ F \in L^\infty(\mathbf{k}^{2d}) : \forall n \in \mathbb{N}, J^n F \in L^\infty(\mathbf{k}^{2d}) \right\}.$$

Posons $K(X, Y) := \overline{\Psi}(2[X, Y])$. Vu comme un élément $\mathcal{S}'(\mathbf{k}^{2d} \times \mathbf{k}^{2d})$, on a

$$J \otimes I^{-1}K = K \quad \text{et} \quad I^{-1} \otimes JK = K.$$

Comme, de plus, I et J commutent sur $\mathcal{S}'(\mathbf{k}^{2d})$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$K = J^N \otimes J^N \left((\mu_0^{-N} \otimes \mu_0^{-N}) K \right). \quad (4.1.5)$$

C'est cette relation qui permet de donner du sens au produit déformé (4.1.4) sur $\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d})$.

L'opérateur J va aussi entrer en jeu dans l'inégalité de Calderón-Vaillancourt pour le calcul de Weyl p -adique. Pour expliquer cela, notons $\eta \in \mathcal{D}(\mathbf{k}^d)$ la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}^d$, $\eta_X = U_\theta(X)\eta$ un état cohérent et $W_{X,Y}$ la fonction de Wigner associée à une paire d'états cohérents :

$$W_{X,Y}(Z) := \langle \eta_X, U_\theta(Z) \Sigma U_\theta(Z)^* \eta_Y \rangle. \quad (4.1.6)$$

Dans [4], Bechata a obtenu à partir de calculs explicites les relations suivantes :

$$|W_{X,Y}(Z)| = \Phi\left(Z - \frac{1}{2}(X + Y)\right), \quad (4.1.7)$$

où Φ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}^d \times \mathcal{O}_{\mathbf{k}}^{od}$, et pour $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$I^m J^n W_{X,Y} = \mu_0^m \left(\frac{1}{2}(X + Y)\right) \mu_0^n \left(\frac{1}{2}(X - Y)\right) W_{X,Y}. \quad (4.1.8)$$

À partir de ces relations on déduit facilement une inégalité du type Calderon-Vaillancourt :

$$\|\Omega_\theta(F)\| \leq \|\mu_0^{-2d-1}\|_1 \|J^{2d+1}F\|_\infty, \quad F \in \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}). \quad (4.1.9)$$

4.2 Déformations des C^* -algèbres

Soit maintenant A une C^* -algèbre munie d'une action continue α du groupe Abélien $G = \mathbf{k}^{2d}$, et posons

$$\alpha : A \rightarrow C_b(\mathbf{k}^{2d}, A), \quad a \mapsto [X \mapsto \alpha_X(a)]. \quad (4.2.1)$$

Soit $\mathcal{S}(\mathbf{k}^{2d}, A)$ et $\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A)$ les généralisations des espaces $\mathcal{S}(\mathbf{k}^{2d})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d})$ dans le cas des fonctions à valeurs dans A . Ce sont des algèbres de Fréchet dont la topologie est associée aux familles suivantes de semi-normes :

$$\|f\|_{n,m} := \sup_{X \in \mathbf{k}^{2d}} \left\| \left(I^n J^m f \right) (X) \right\|_A, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbf{k}^{2d}, A), \quad n, m \in \mathbb{N},$$

et

$$\|F\|_m := \sup_{X \in \mathbf{k}^{2d}} \left\| \left(J^m F \right) (X) \right\|_A, \quad f \in \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A), \quad m \in \mathbb{N}.$$

On définit ensuite :

$$A_{\text{reg}} := \left\{ a \in A : \alpha(a) \in \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A) \right\}. \quad (4.2.2)$$

On montre alors :

Proposition 4.2.1. [41, Proposition 3.11] A_{reg} est une sous-algèbre de Fréchet dense dans A et stable par α .

En utilisant la relation (4.1.5), on montre facilement :

Proposition 4.2.2. [41, Proposition 3.12] Soit $\theta \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}}$. Alors, l'application bilinéaire

$$\star_{\theta} : \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A) \times \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A),$$

$$(F_1, F_2) \mapsto |\mathbb{2}|_{\mathbf{k}}^{2d} \int \overline{\Psi}(2[Y, Z]) \mu_0^{-2d-1}(Y) \mu_0^{-2d-1}(Z) \tau_{\theta Y}(J_{\theta}^{2d+1} F_1) \tau_Z(J^{2d+1} F_2) dY dZ,$$

est continue et associative. Si de plus $\theta = 0$, on a alors $F_1 \star_{\theta=0} F_2 = F_1 F_2$.

Remarque 4.2.3. Dans la proposition précédente, nous devons nous restreindre au cas $\theta \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}}$ pour une raison purement technique : si $\theta \in \mathbf{k} \setminus \mathcal{O}_{\mathbf{k}}$, rien ne garantit que l'opérateur de dilatation $D_{\theta}F(X) := F(\theta X)$ agisse continûment sur $\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A)$.

Par définition, l'application (4.2.1) envoie A_{reg} continûment dans $\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A)$. En posant :

$$\star_{\theta}^{\alpha} : A_{\text{reg}} \times A_{\text{reg}} \rightarrow A_{\text{reg}}, \quad (a, b) \mapsto \alpha(a) \star_{\theta} \alpha(b)(0),$$

on déduit facilement de la Proposition (4.2.2) la première étape de notre théorie des déformations :

Théorème 4.2.4. [41, Theorem 3.19] Soient \mathbf{k} un corps local non Archimédien de caractéristique différente de 2 et $\theta \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}}$. Soit aussi A une C^* -algèbre munie d'une action continue α de \mathbf{k}^{2d} . Alors, $(A_{\text{reg}}, \star_{\theta}^{\alpha})$ est une algèbre de Fréchet associative sur laquelle α est toujours par automorphismes et l'involution originale reste une involution continue.

Passons maintenant à la construction d'une pré- C^* -norme sur l'algèbre de Fréchet déformée $(A_{\text{reg}}, \star_{\theta}^{\alpha})$. Pour $F \in \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A)$, considérons l'élément de $\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d} \times \mathbf{k}^{2d}, A)$ donné par :

$$W_{X,Y}^A(F) := \left| \frac{\mathbb{2}}{\theta} \right|_{\mathbf{k}}^d \int_{\mathbf{k}^{2d}} W_{X,Y}(Z) F(Z) dZ, \quad (4.2.3)$$

où $W_{X,Y}$ est la fonction de Wigner donnée dans (4.1.6). En utilisant (4.1.7) et (4.1.8), on montre facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $F \in \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A)$, on a :

$$\|W_{X,Y}^A(F)\|_A \leq \mu_0^{-n} \left(\frac{1}{2}(X - Y) \right) \sup_{X \in \mathbf{k}^{2d}} \left\| (J^n F)(X) \right\|_A. \quad (4.2.4)$$

On va maintenant identifier la C^* -algèbre A avec son image dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour n'importe quelle représentation fidèle sur \mathcal{H} . On définit ensuite au sens faible sur $L^2(\mathbf{k}^d) \otimes \mathcal{H}$:

$$\mathbf{W}^A(F) := |\theta|_{\mathbf{k}}^{-2d} \int_{\mathbf{k}^{2d} \times \mathbf{k}^{2d}} |\eta_Y\rangle \langle \eta_X| \otimes W_{X,Y}^A(F) dX dY.$$

Le résultat qui suit se déduit essentiellement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'estimation (4.2.4) :

Proposition 4.2.5. [41, Proposition 4.4 & Corollary 4.6] Soient $F \in \mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A)$ et $\theta \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}}$. La forme quadratique associée à l'intégrale faible $\mathbf{W}_{\theta}^A(F)$ est bornée avec :

$$\|\mathbf{W}^A(F)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbf{k}^d) \otimes \mathcal{H})} \leq \|\mu_0^{-2d-1}\|_1 \sup_{X \in \mathbf{k}^{2d}} \left\| (J^{2d+1} F)(X) \right\|_A.$$

De plus, l'application $F \mapsto \mathbf{W}^A(F)$ définit un $*$ -homomorphisme continu et injectif de $(\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A), \star_{\theta}, *)$ vers $\mathcal{B}(L^2(\mathbf{k}^d) \otimes \mathcal{H})$.

On en déduit alors le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 4.2.6. [41, Theorem 4.8] Soient \mathbf{k} un corps local non Archimédien de caractéristique différente de 2, $\theta \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \setminus \{0\}$ et $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une C^* -algèbre munie d'une action continue α de \mathbf{k}^{2d} . La norme :

$$A_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad a \mapsto \|a\|_{\theta} := \left\| \mathbf{W}_{\theta}^A(\alpha(a)) \right\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbf{k}^d) \otimes \mathcal{H})},$$

munit $(A_{\text{reg}}, \star_{\theta}^{\alpha}, *)$ d'une structure de pré- C^* -algèbre. Son adhérence en norme est appelée la C^* -déformation de A et est notée A_{θ} . De plus, l'action α sur A_{reg} est toujours par automorphismes pour le produit déformé et s'étend en une action continue sur A_{θ} .

Remarque 4.2.7. De l'unitarité de la quantification on déduit que $C_0(\mathbf{k}^{2d})_{\theta} \simeq \mathcal{K}(L^2(\mathbf{k}^d))$ d'où il découle que, contrairement au cas Archimédien [79] ainsi qu'au cas Kählérien [8], la K -théorie n'est pas un invariant de la déformation.

Nous allons maintenant passer en revue les propriétés de cette déformation. Tout d'abord nous allons donner une construction équivalente de la C^* -norme déformée. Pour la première, considérons $\mathcal{S}(\mathbf{k}^{2d}, A)$ comme un pré- C^* -module à droite sur A , de la manière décrite dans la définition 3.6.2. On montre alors que $\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A)$ agit par multiplication déformée sur $\mathcal{S}(\mathbf{k}^{2d}, A)$ et que cette action définit un morphisme injectif de l'algèbre de Fréchet involutive $(\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A), \star_{\theta}, *)$ dans la C^* -algèbre des endomorphismes adjointables de $\mathcal{S}(\mathbf{k}^{2d}, A)$. On montre aussi que cette pré- C^* -norme sur $(\mathcal{B}(\mathbf{k}^{2d}, A), \star_{\theta}, *)$ coïncide avec celle construite au Théorème 4.2.6. De cela découle le résultat suivant :

Proposition 4.2.8. [41, Proposition 4.11] Soit $\theta \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \setminus \{0\}$. La C^* -norme $\|\cdot\|_{\theta}$ sur l'algèbre de Fréchet involutive $(A_{\text{reg}}, \star_{\theta}^{\alpha}, *)$ coïncide avec :

$$A_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad a \mapsto \left\| \left[\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{k}^{2d}, A) \mapsto \alpha(a) \star_{\theta} \varphi \right] \right\|.$$

Ce résultat montre que la C^* -norme déformée est aussi définie pour $\theta = 0$ et qu'elle coïncide pour cette valeur avec la C^* -norme originale. Cela nous permettra de montrer, le moment venu, un résultat sur la continuité du champs de C^* -algèbre $(A_{\theta})_{\theta \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}}}$.

Remarque 4.2.9. On peut aussi montrer (voir [41, Theorem 4.15]) que notre construction coïncide aussi avec l'approche de Kasprzak [55], et donc avec celle Neshveyev et Tuset [70] qui la généralise.

De la remarque précédente et des résultats de Kasprzak [55], on déduit immédiatement que la déformation peut être itérée :

Proposition 4.2.10. [41, Theorem 5.5] Soit $\theta, \theta' \in \mathcal{O}_{\mathbf{k}}$. On a alors $(A_{\theta})_{\text{reg}} = A_{\text{reg}}$ et de plus $(A_{\theta})_{\theta'} \simeq A_{\theta+\theta'}$.

La propriété suivante montre que la déformation est compatible avec les extensions. Sa preuve est identique à son analogue dans le cas Archimédien [80]. Notons aussi que cette propriété fait défaut dans le cas Kählérien [8].

Théorème 4.2.11. [41, Theorem 5.6] Soit I un idéal de A stable par α et soit $Q := A/I$ muni de l'action quotient. La suite exacte courte équivariante $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow Q \rightarrow 0$, donne alors lieu à une suite exacte courte équivariante C^* -algèbres déformées : $0 \rightarrow I_{\theta} \rightarrow A_{\theta} \rightarrow Q_{\theta} \rightarrow 0$.

Notre dernier résultat concerne la continuité du champs de C^* -algèbres déformées $(A_\theta)_{\theta \in \mathcal{O}_k}$. La preuve de ce résultat est quasiment identique à son analogue Archimédien [80]. Cependant, à cause du mauvais comportement de la fonction racine carré sur un corps local, notre domaine de continuité est significativement réduit.

Théorème 4.2.12. *[41, Theorem 5.7] Soit $\gamma \in \mathcal{O}_k$. Alors, le champs de C^* -algèbres déformées $(A_{\gamma\theta^2})_{\theta \in \mathcal{O}_k}$ est continu.*

Deuxième partie

Espaces Noncommutatifs Semi-finis et Localement Compacts

Chapitre 5

Introduction

Dans la philosophie d'Alain Connes [25–27], une géométrie noncommutative est déterminée par la donnée d'un triplet spectral. Ici, \mathcal{A} est une pré- C^* -algèbre, \mathcal{D} est un opérateur auto-adjoint densément défini et \mathcal{H} est un espace de Hilbert séparable sur lequel agissent \mathcal{A} et \mathcal{D} . Des conditions de compatibilités, pouvant différer suivant le point de vue adopté, sont imposées entre ces objets. L'algèbre \mathcal{A} représente l'espace noncommutatif au niveau topologique et l'opérateur \mathcal{D} donne à la fois une notion de différentiabilité pour les opérateurs sur \mathcal{H} et une structure métrique sur l'espace des états de \mathcal{A} , la C^* -completion de \mathcal{A} . Le paradigme d'un triplet spectral est celui canoniquement attaché à une variété spinorielle compacte $(M, g, S) : \mathcal{A} = C^\infty(M)$, l'algèbre des fonctions lisses sur M , $\mathcal{H} = L^2(M, S)$, l'espace de Hilbert des sections de carré intégrable du fibré des spineurs et $\mathcal{D} = \not{D}$, l'opérateur de Dirac sur ce fibré. La notion abstraite de triplet spectral a une double origine. La première émane de la physique fondamentale, la seconde de la théorie de l'indice.

Un triplet spectral est tout d'abord une généralisation quantique de la notion de variété Riemannienne à spin : si on impose comme condition supplémentaire la commutativité de l'algèbre (dans le cas unifère), alors il existe une variété Riemannienne à spin compacte (M, g) , telle que $\mathcal{A} = C^\infty(M)$, $\mathcal{H} = L^2(M, S)$ et $\mathcal{D} = \not{D}$. C'est le Théorème de reconstruction de Connes [28]. En ce sens, la notion de triplet spectral donne un cadre commun à la mécanique quantique et la relativité générale et fournit, si ce n'est une approche à la gravité quantique, en tout cas un cadre permettant d'intégrer les possibles effets microscopiques de la gravitation en théorie quantique des champs ; c'est le sujet de la théorie quantique des champs noncommutatifs. Un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ définit aussi une classe en K -homologie ou, plus généralement, une classe en KK -théorie qui couplée avec une classe en K -théorie calcule l'indice d'un opérateur de Fredholm construit à partir de \mathcal{D} ainsi que d'un représentant d'une classe dans $K_*(A)$. Un triplet spectral définit aussi un cocycle en cohomologie cyclique périodique, le caractère de Chern du triplet, qui couplé à son homologue en homologie cyclique calcule cet indice [25]. En calculant ce couplage à l'aide de représentants locaux du caractère de Chern (i.e. construits avec des résidus de fonctions ζ) Connes et Moscovici ont obtenu une formule locale pour cet indice [29] fournissant une généralisation noncommutative au théorème d'Atiyah-Singer. Ainsi, un triplet spectral peut être à la fois pensé comme la version quantique d'une variété spinorielle mais aussi comme un cadre abstrait à la théorie de l'indice.

Dans le cas compact, c'est-à-dire lorsque l'algèbre \mathcal{A} possède une unité, le cadre ma-

jointement étudié, un triplet spectral est défini a minima par deux conditions :

- (C1) : Les commutateurs $[\mathcal{D}, a]$, $a \in \mathcal{A}$, s'étendent en des opérateurs bornés,
- (C2) : L'opérateur \mathcal{D} est à résolvante compacte.

Lorsque que l'on pense à un triplet spectral comme à une variété spinorielle quantique, il est nécessaire d'ajouter des conditions supplémentaires, conditions qui permettent en particulier de démontrer le Théorème de reconstruction de Connes [27]. Mais à elles seules, les deux conditions (C1) et (C2) permettent d'associer à un triplet spectral une classe en K -homologie. En adoptant le point de vue de la théorie bi-variante de Kasparov [54], on sait grâce à des observations dues à Alain Connes que la notion de triplet spectral peut être étendue dans (au moins) deux directions et ce en affaiblissant la condition (C2). On peut tout d'abord supprimer l'hypothèse de compacité, c'est-à-dire l'hypothèse d'existence d'une unité pour l'algèbre \mathcal{A} . On se placera alors dans le cadre plus général des espaces noncommutatifs localement compacts. À cet effet, on remplace la condition (C2) par une condition de "compacité locale" :

$$(C2') : a(z + \mathcal{D})^{-1} \text{ est un opérateur compact pour tout } a \in \mathcal{A} \text{ et tout } z \notin \text{Spec}(\mathcal{D}).$$

La deuxième extension possible consiste à affaiblir la notion même de compacité. Sans vouloir aller jusqu'à la notion de compacité au sens des endomorphismes adjointables d'un C^* -module, cadre naturel de la KK -théorie, on peut très naturellement utiliser la notion de compacité au sens des algèbres de von Neumann semi-finies. C'est le cadre de la géométrie noncommutative semi-finie ou encore géométrie noncommutative de type II. Plus précisément, on parle de triplet spectral semi-fini lorsque l'algèbre \mathcal{A} (unifère ou non) est contenue dans une algèbre de von Neumann \mathcal{N} semi-finie et lorsque l'opérateur \mathcal{D} lui y est affilié. Rappelons qu'associée à une trace normale fidèle et semi-finie τ sur \mathcal{N} , il existe une notion d'opérateurs compacts : c'est l'adhérence en norme de l'algèbre engendrée par les projections de traces τ finies. Dans le cadre semi-fini et localement compact, la condition (C2') est remplacée par :

$$(C2'') : a(z + \mathcal{D})^{-1} \text{ est un opérateur } \tau\text{-compact pour tout } a \in \mathcal{A} \text{ et tout } z \notin \text{Spec}(\mathcal{D}).$$

Mes contributions à la géométrie noncommutative semi-finie concernent la théorie de l'intégration noncommutative et la théorie de l'indice dans le cas localement compact. Elles sont issues de collaborations récentes avec Alan Carey, Adam Rennie, John Phillips, Fedor Sukochev et Raimar Wulkenhaar [16–18, 43, 44].

Le chapitre 6 concerne la théorie de l'intégration et constitue une synthèse des résultats obtenus dans les articles [16] et [43]. La notion d'intégration à laquelle nous faisons référence est celle associée aux traces de Dixmier. Dans le cas particulier d'un triplet spectral (p, ∞) -sommable, c'est-à-dire lorsque les opérateurs $a(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}$, $a \in \mathcal{A}$, sont dans (la version semi-finie de) l'idéal de Dixmier, l'intégrale noncommutative est donnée par l'application linéaire

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \mapsto \tau_\omega(a(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}).$$

La problématique générale consiste à trouver des méthodes simples pour calculer cette intégrale. Dans le cas semi-fini, unifère et (p, ∞) -sommable, on sait relier les traces de

Dixmier aux résidus généralisés de fonctions ζ et aux moyennes de Cesàro des traces des semi-groupes de la chaleur. Ces résultats ont été obtenus indépendamment par Benameur et Fack [5] et par Carey, Philipps et Sukochev dans [20] et sont des généralisations au cas semi-fini de résultats obtenus par Connes dans le cas des triplets spectraux unifères de type I . Par contre, ces résultats n'apportent aucune solution au problème dans le cas localement compact, semi-fini ou non. En effet, les traces $\tau\left((a^*(1+\mathcal{D}^2)^{-p/2}a)^s\right)$, $s > 1$, sont typiquement impossibles à calculer. Par contre, les traces $\tau\left(a^*(1+\mathcal{D}^2)^{-ps/2}a\right)$, $s > 1$, se calculent facilement dans les exemples concrets. Au paragraphe 6.2, nous construisons un cadre analytique permettant dans le cas semi-fini localement compact et (p, ∞) -sommable de relier l'intégrale noncommutative aux résidus généralisés en $s = 1$ de fonctions ζ de la forme $\tau\left(a^*(1+\mathcal{D}^2)^{-ps/2}a\right)$, ainsi qu'aux résidus généralisés de semi-groupes de la chaleur. Au paragraphe 6.3, nous nous intéressons au cas de sommabilité quelconque et, dans un premier temps, compact. Notre principale découverte est un lien étroit entre les espaces de Marcinkiewicz d'opérateurs (idéaux de Dixmier généralisés) et une théorie d'extrapolation des espaces L^p noncommutatifs. Nous déterminons dans ce cas des conditions suffisantes et presque nécessaires pour pouvoir relier les traces de Dixmier aux fonctions ζ et aux semi-groupes de la chaleur. Nous obtenons aussi une application à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^n en démontrant que pour un opérateur de Hörmander-Weyl de symbole dans un espace de Marcinkiewicz commutatif, la trace de Dixmier de cet opérateur coïncide avec l'intégrale de Dixmier de son symbole.

Le chapitre 7 concerne la théorie de l'indice pour les triplets spectraux semi-finis sans unité et constitue une synthèse des résultats obtenus dans les articles [17] et [18]. En suivant la philosophie de Kasparov, il est facile de définir une application indice en KK -théorie à partir d'un triplet spectral semi-fini et sans unité $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$. En simplifiant un peu la construction, avec \mathcal{K}_τ la C^* -algèbre des opérateurs τ -compacts et $F_{\mathcal{D}} := \mathcal{D}(1 + \mathcal{D}^2)^{-1/2}$, on a un module de Kasparov $(\mathcal{K}_\tau, F_{\mathcal{D}})$ qui définit une classe dans $KK^*(A, \mathcal{K}_\tau)$, de même parité que le triplet. L'application indice numérique que nous regardons, est celle donnée par le produit de Kasparov $K_*(A) = KK^*(\mathbb{C}, A) \rightarrow K_0(\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau))$, $\xi \mapsto \xi \otimes_A [(\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau), F_{\mathcal{D}})]$, composé avec l'homomorphisme $\tau_* : K_0(C) \rightarrow \mathbb{C}$. En construisant un représentant normalisé de la classe $[(\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau), F_{\mathcal{D}})]$ on peut montrer que cette application indice calcule un véritable indice au sens de Brauer-Fredholm. Il en découle aussi que l'application indice calcule le couplage entre le caractère de Chern en cohomologie cyclique périodique avec son homologue en homologie. Notre résultat principal est une formule locale de l'indice du type Connes-Moscovici [29] dans ce cadre localement compact et semi-fini. Nos résultats généralisent ceux obtenus dans le cas semi-fini et compact par Carey, Phillips, Rennie et Sukochev [21, 22], résultats basés sur une extension au cas semi-fini des méthodes développées par Higson [49], lesquelles simplifient l'approche originale de Connes et Moscovici [29]. La nouveauté principale de notre approche se trouve dans la partie analytique des preuves. C'est la condition de sommabilité régulière et la notion de calcul pseudo-différentiel adapté qui lui est reliée (voir paragraphe 7.2) qui nous a permis de justifier analytiquement dans le cas localement compact les manipulations algébriques de [22, 23]. En étendant les méthodes de Ponge [75], nous obtenons une généralisation du Théorème d'Atiyah-Singer dans le cadre des variétés spinorielles à géométrie bornée. Dans le cas d'une action des réels sur une C^* -algèbre munie d'une trace invariante, nous retrouvons le Théorème de l'indice de Phillips-Raeburn [74].

Chapitre 6

Théorie de l'intégration pour les espaces noncommutatifs semi-finis et localement compacts

6.1 Notations et généralités

Dans tout ce qui suit, on se donne une algèbre de von Neumann semi-finie $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ munie d'une trace semi-finie, normale et fidèle τ .

Pour $p \in [1, \infty)$, on note $\mathcal{L}^p(\mathcal{N}, \tau)$ l'espace L^p noncommutatif. Rappelons que contrairement au cas des facteurs de type I_∞ , les espaces $\mathcal{L}^p(\mathcal{N}, \tau)$ peuvent contenir des opérateurs non bornés ; les espaces $\mathcal{L}^p(\mathcal{N}, \tau)$ ne sont en général pas des idéaux de \mathcal{N} mais des bi-modules sur \mathcal{N} .

Soit $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \tau)$ l'idéal de \mathcal{N} engendré par les projections de traces τ finies et soit $\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ l'adhérence de $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \tau)$ dans \mathcal{N} ; c'est la C^* -algèbre des opérateurs τ -compacts.

Soit $\mathcal{L}_0(\mathcal{N}, \tau)$ l'ensemble des opérateurs τ -mesurables [37]. Pour $T \in \mathcal{L}_0(\mathcal{N}, \tau)$, on considère la fonction valeurs singulières généralisées $\mu(T, t) := \inf\{\|PT\| : \tau(1 - P) \leq t\}$, $t > 0$, où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des projecteurs de \mathcal{N} [37].

6.1.1 Espaces de Marcinkiewicz d'opérateurs

Soit Ω l'ensemble des fonctions $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, concaves, croissantes et satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$\psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty. \quad (6.1.1)$$

Pour $\psi \in \Omega$, soit $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ l'espace de Marcinkiewicz d'opérateurs τ -mesurables associé :

$$\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) := \left\{ T \in \mathcal{L}_0(\mathcal{N}, \tau) : \|T\|_\psi := \sup_{t>0} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \mu(T, s) ds < \infty \right\}. \quad (6.1.2)$$

Si on suppose de plus que $\psi(t) = O(t)$, $t \rightarrow 0$, on a alors $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) \subset \mathcal{N}$. C'est en particulier le cas de (la version semi-finie de) l'idéal de Dixmier classique $\mathcal{L}^{1,\infty}(\mathcal{N}, \tau)$, espace Marcinkiewicz associé à la fonction $\psi(t) = \log(1 + t)$. Étant donné que dans

la littérature la notation $\mathcal{L}^{1,\infty}$ est aussi utilisée pour désigner l'espace quasi-normé L^1 -faible (c'est-à-dire l'espace des opérateurs satisfaisant à la condition $\mu(T, t) = O(t^{-1})$), on utilisera à la place la notation $\mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$. Soit aussi $\mathcal{M}_\psi^0(\mathcal{N}, \tau)$, l'adhérence dans $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ de $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \tau)$ et soit finalement $\mathcal{M}_\psi^p(\mathcal{N}, \tau)$, $p \geq 1$, la p -convexification de l'espace $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$:

$$\mathcal{M}_\psi^p(\mathcal{N}, \tau) := \left\{ T \in \mathcal{L}_0(\mathcal{N}, \tau) : |T|^p \in \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) \right\}.$$

6.1.2 Traces de Dixmier semi-finies

Par une trace sur un espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$, on entendra une forme linéaire positive, continue et invariante par conjugaison par les unitaires de \mathcal{N} .

Définition 6.1.1. *Une trace sur un espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ est dite*

- *Singulière, si elle s'annule sur $\mathcal{M}_\psi^0(\mathcal{N}, \tau)$;*
- *Supportée à l'infini, si elle s'annule sur $\mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau) \cap \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$;*
- *Supportée en 0, si elle s'annule sur $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$;*
- *Normalisée, si elle prend la valeur 1 sur tout élément $T \in \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ tel que $\mu(T, t) = \psi'(t)$.*

Dans la suite, on s'intéressera uniquement aux traces singulières supportées à l'infini. On sait exactement quels sont les espaces de Marcinkiewicz qui possèdent de telles traces :

Théorème 6.1.2. [33, Theorem 3.4] *Une trace singulière supportée à l'infini existe sur $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ si et seulement si*

$$\forall a > 1 \quad : \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(at)}{\psi(t)} = 1. \quad (6.1.3)$$

On sait aussi construire toutes les traces singulières supportées à l'infini sur un espace de Marcinkiewicz. Pour expliquer ceci, nous avons besoin des notions suivantes :

Définition 6.1.3. *Soit ω un état de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et ψ un élément de Ω . On dira que ω est*

- *Singulier si il s'annule sur $C_0(\mathbb{R}_+^*)$;*
- *Invariant par translations si $\omega([x \mapsto f(x+a)]) = \omega(f)$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall f \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$;*
- *Invariant par dilatations si $\omega([x \mapsto f(ax)]) = \omega(f)$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall f \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$;*
- *Invariant par exponentiations si $\omega([x \mapsto f(x^a)]) = \omega(f)$, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall f \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$;*
- *ψ -compatible si il existe $a > 1$ tel que $\omega\left([t \mapsto \frac{\psi(at)}{\psi(t)}]\right) = 1$.*

Théorème 6.1.4. [56, Proposition 10 & Theorem 11] *Soit $\psi \in \Omega$ satisfaisant à (6.1.3).*

1. *Soit ω un état de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, ψ -compatible et invariant par dilatations. Alors la fonctionnelle*

$$\tau_{\psi, \omega} : \mathcal{M}_\psi^+(\mathcal{N}, \tau) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad T \mapsto \omega\left([t \mapsto \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \mu(T, s) ds]\right), \quad (6.1.4)$$

est positivement additive et son extension par linéarité est une trace singulière normalisée et supportée à l'infini.

2. *Réciproquement, toute trace singulière, normalisée et supportée à l'infini sur l'espace $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ est de la forme précédente.*

Remarque 6.1.5. Le premier point du théorème précédent est en fait une généralisation directe de la construction de Dixmier [31]. Ainsi, nous continuerons d'appeler trace de Dixmier toute trace singulière normalisée et supportée à l'infini sur un espace de Marcinkiewicz. L'existence de traces singulières dans les algèbres de von Neumann semi-finies a été démontrée par Guido et al [1, 47] puis (en suivant une approche commutative) par Dodds et al [33]. La première extension de la construction de Dixmier au cadre semi-fini et pour $\psi(t) = \log(1 + t)$ est due à Benameur et Fack [5].

Remarque 6.1.6. Il est important de mentionner que l'on peut aussi construire des traces singulières à partir d'états de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ possédant d'autres propriétés d'invariance. Par exemple, si ω est invariant par exponentiations et ψ -compatible alors la fonctionnelle (6.1.4) est aussi positivement additive. Ce que nous dit le théorème précédent, c'est qu'il existe alors un autre état ω' de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, invariant cette fois par dilatations et toujours ψ -compatible, tel que $\tau_{\psi,\omega} = \tau_{\psi,\omega'}$. Notons aussi que pour l'idéal de Dixmier $\mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$, tout état singulier de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ est ψ -compatible. Dans ce cas-là, à tout état invariant par dilatations correspond une trace de Dixmier.

6.1.3 Triplets spectraux semi-finis

En analogie directe avec le cadre standard développé par Connes [26], la notion de triplet spectral semi-fini a été introduite par Benameur et Fack [5]. Pour parler d'un triplet spectral semi-fini et sans unité, on retiendra les conditions (C1) et (C2'') :

Définition 6.1.7. *Un triplet spectral semi-fini $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, relativement à (\mathcal{N}, τ) , consiste en la donnée d'un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} , d'une $*$ -algèbre $\mathcal{A} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et d'un opérateur auto-adjoint \mathcal{D} affilié à \mathcal{N} tels que*

1. *Les éléments de \mathcal{A} préservent le domaine de \mathcal{D} et les commutateurs $[\mathcal{D}, a]$, $a \in \mathcal{A}$, s'étendent en des opérateurs bornés.*
2. *Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $a(1 + \mathcal{D}^2)^{-1/2} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$.*

On dira aussi qu'un triplet spectral est pair si il existe une graduation sur \mathcal{H} pour laquelle \mathcal{A} est paire et \mathcal{D} est impair. Dans le cas contraire, on parlera de triplet spectral impair.

Dans le cas unifié, un triplet spectral semi-fini $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est dit finiment sommable lorsqu'il existe $s > 0$ tel que $(1 + \mathcal{D}^2)^{-s/2} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau)$. Dans ce cas, on appelle dimension spectrale du triplet le nombre positif suivant :

$$p := \inf \left\{ s > 0 : \tau \left((1 + \mathcal{D}^2)^{-s/2} \right) < \infty \right\}.$$

Pour un triplet spectral semi-fini sans unité, la généralisation de la notion de sommabilité finie est immédiate, celle de dimension spectrale l'est un peu moins. Voici celles que nous retiendrons :

Définition 6.1.8. *Un triplet spectral semi-fini sans unité $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est finiment sommable si il existe $s > 0$ tel que $a(1 + \mathcal{D}^2)^{-s/2} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau)$, pour tout $a \in \mathcal{A}$. Dans ce cas, on appelle dimension spectrale du triplet, le nombre positif suivant :*

$$p := \inf \left\{ s > 0 : \forall a \in \mathcal{A}, \tau \left(|a|(1 + \mathcal{D}^2)^{-s/2} \right) < \infty \right\}.$$

Remarque 6.1.9. Pour comprendre la définition de dimension spectrale dans le cas d'un triplet spectral sans unité, il convient de faire les observations suivantes. D'une part, la décomposition polaire $a = v|a|$ d'un élément de \mathcal{A} donne $|a|(1 + \mathcal{D}^2)^{-s/2} = v^*a(1 + \mathcal{D}^2)^{-s/2}$, qui est un opérateur à trace car $a(1 + \mathcal{D}^2)^{-s/2}$ l'est par hypothèse de sommabilité finie. D'autre part il faut s'appuyer sur un résultat de Bikchentaev [11, Theorem 3], qui établit que si $0 \leq A, B \in \mathcal{N}$ sont tels que $AB \in \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau)$, alors $\tau(AB) \geq 0$.

Le cas de sommabilité finie le plus largement étudié est celui de la (p, ∞) -sommabilité, noté ici \mathcal{M}_{\log}^p -sommabilité. Pour un triplet spectral semi-fini unifié de dimension spectrale $p \geq 1$, on parlera de \mathcal{M}_{\log}^p -sommabilité lorsque $(1 + \mathcal{D}^2)^{-1/2} \in \mathcal{M}_{\log}^p(\mathcal{N}, \tau)$ ou de manière équivalente lorsque $(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2} \in \mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$. Cette notion se généralise à la fois au cadre sans unité ainsi qu'à celui des espaces de Marcinkiewicz arbitraires :

Définition 6.1.10. Soit $\psi \in \Omega$ satisfaisant à (6.1.3). Un triplet spectral semi-fini, sans unité $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ et finiment sommable de dimension spectrale $p \geq 1$ est dit \mathcal{M}_{ψ}^p -sommable lorsque $a(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2} \in \mathcal{M}_{\psi}(\mathcal{N}, \tau)$, pour tout $a \in \mathcal{A}$.

6.1.4 L'intégrale noncommutative

Soit $\psi \in \Omega$ satisfaisant à (6.1.3). Se donnant un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ semi-fini, non nécessairement unifié et \mathcal{M}_{ψ}^p -sommable, à tout état ω de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ invariant par dilatations et ψ -compatible est associé une forme linéaire sur \mathcal{A} , donnée par l'application

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \mapsto \tau_{\psi, \omega}(a(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}).$$

Dans le cas d'un triplet spectral semi-fini, unifié et \mathcal{M}_{\log}^p -sommable, on sait que cette forme linéaire est une trace continue sur \mathcal{A} ; c'est elle qui donne une notion naturelle d'intégrale en géométrie noncommutative. Le problème reste de savoir comment calculer cette application. En effet, même dans les exemples concrets, on a rarement accès explicitement à la fonction des valeurs singulières généralisées d'un opérateur. Dans le cas de l'idéal de Dixmier $\mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$, il existe cependant des méthodes utilisant les fonctions ζ et le semi-groupe de la chaleur qui permettent de calculer l'intégrale noncommutative pour un triplet spectral semi-fini, unifié et \mathcal{M}_{\log}^p -sommable. Ces méthodes reposent sur les deux résultats suivants. Le premier donne des conditions nécessaires et suffisantes en termes de sa fonction ζ et de la trace de son semi-groupe de la chaleur pour qu'un opérateur positif appartienne à l'idéal de Dixmier $\mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$. Le deuxième permet d'exprimer les traces de Dixmier à l'aide des fonctions ζ et des semi-groupes de la chaleur.

Proposition 6.1.11. [24, Theorem 4.5 & Lemma 5.1] Soit $T \in \mathcal{N}$.

1. $T \in \mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\sup_{s>1} (s-1)\tau(|T|^s) < \infty \quad ; \quad \sup_{\lambda>0} \frac{1}{\log(1+\lambda)} \int_0^\lambda \tau(e^{-(t|T|)^{-1}}) \frac{dt}{t^2} < \infty.$$

2. $\mu_t(T) = O(t^{-1})$ si et seulement si :

$$\sup_{t>0} t^{-1} \tau(e^{-(t|T|)^{-1}}) < \infty.$$

Remarques 6.1.12. En réalité, seule l'inégalité $\sup_{s>1} (s-1)\tau(|T|^s) \leq \|T\|_{\log}$ est démontrée dans [24, Theorem 4.5] et seulement dans le cas des facteurs et des algèbres de von Neumann non atomiques. Des modifications minimales de la preuve de [24, Theorem 4.5] donne l'équivalence des normes dans le cas général. Ces modifications sont données dans [16, Theorem 2.1]. L'équivalence entre la norme de $\mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$ et

$$\sup_{\lambda>0} \frac{1}{\log(1+\lambda)} \int_0^\lambda \tau\left(e^{-(t|T|)^{-1}}\right) \frac{dt}{t^2},$$

n'est en fait qu'implicite dans [24]. La preuve est explicitement donnée dans [16, Corollary 3.5]. En posant $\xi_T(t) := t^{-1} \tau\left(e^{-(t|T|)^{-1}}\right)$ et avec M la moyenne de Césaro du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* , on a donc $T \in \mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$ si et seulement si $\|M\xi_T\|_\infty < \infty$ et $\mu_t(T) = O(t^{-1})$ si et seulement si $\|\xi_T\|_\infty < \infty$. Une question naturelle est de savoir si les normes $T \mapsto \|M^k \xi_T\|_\infty$, $k \geq 2$, définissent des idéaux de \mathcal{N} contenant strictement $\mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$. Nous démontrons qu'il n'en est rien dans [16, Lemma 2.3].

Passons maintenant en revue le résultat permettant de calculer des traces de Dixmier à partir des fonctions ζ et du semi-groupe de la chaleur. C'est ce résultat que l'on va généraliser dans les paragraphes 6.2 et 6.3.

Théorème 6.1.13. *Soit $T \in \mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)_+$, $B \in \mathcal{N}$ et ω un état de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ invariant par exponentiations. Alors,*

$$\tau_{\log, \omega}(BT) = \omega\left(\left[r \mapsto \frac{\tau(BT^{1+\log(r)^{-1}})}{\log(1+r)}\right]\right) \quad (6.1.5)$$

$$= \omega\left(\left[\lambda \mapsto \frac{1}{\log(1+\lambda)} \int_0^\lambda \tau\left(Be^{-(tT)^{-1}}\right) \frac{dt}{t^2}\right]\right). \quad (6.1.6)$$

Remarque 6.1.14. La toute première version du Théorème 6.1.13 a été obtenue par Connes [26] dans le cadre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec T mesurable (c'est-à-dire lorsque $\tau_{\psi, \omega}(T)$ ne dépend pas de ω), $B = 1$ et avec des hypothèses plus fortes sur ω . Plusieurs améliorations et généralisations s'ensuivent, par exemple dans [5, 20, 24, 88]. Dans la forme dans laquelle nous le formulons ici, ce résultat est établi dans [87]. Un tracé complet des différentes étapes amenant à ce résultat peut être consulté dans la monographie [68].

Remarque 6.1.15. Les membres de droite des égalités (6.1.5) et (6.1.6) peuvent aussi servir de point de départ à la construction de traces singulières normalisées et supportées à l'infini sur $\mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$. En particulier, on sait que le membre de droite de l'égalité (6.1.5) est linéaire pour tout état singulier ω [88, Theorem 8] alors que le membre de droite de l'égalité (6.1.6) est linéaire si et seulement si ω est invariant par dilatations [88, Proposition 18 & Theorem 22]. De plus, toute trace singulière normalisée et supportée à l'infini est aussi de la forme du membre de droite de l'égalité (6.1.6).

Dans le cas d'un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ semi-fini \mathcal{M}_{\log}^p -sommable mais sans unité, le théorème précédent n'apporte aucune solution à la question du calcul de l'intégrale noncommutative $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto \tau_{\log, \omega}\left(a(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}\right)$. En effet, dans cette situation, les traces

$$\tau\left((a^*(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}a)^s\right) \quad \text{et} \quad \tau\left(e^{-t(a^*(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}a)^{-1}}\right),$$

sont typiquement impossibles à calculer. Par contre, les traces

$$\tau\left(a^*(1 + \mathcal{D}^2)^{-ps/2}a\right) \quad \text{et} \quad \tau\left(a^*e^{-t(1+\mathcal{D}^2)^{p/2}}a\right), \quad (6.1.7)$$

se calculent dans les exemples concrets très facilement.

Il en est de même dans le cas d'un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ semi-fini unifère mais pour une sommabilité arbitraire. En effet, d'une part les méthodes permettant d'obtenir le Théorème 6.1.13 sont fortement liées à la divergence logarithmique, en particulier au travers de l'utilisation du Lemme de Karamata, et, d'autre part, les membres de droite des égalités (6.1.5) et (6.1.6) n'ont pas d'analogues évident dans le cas de la \mathcal{M}_ψ^p -sommabilité.

6.2 Cas localement compact et \mathcal{M}_{\log}^p -sommable

Ce paragraphe est une synthèse des résultats obtenus dans l'article [16], travail en commun avec Alan Carey, Adam Rennie et Fedor Sukochev, dans lequel nous avons trouvé pour un triplet spectral semi-fini, \mathcal{M}_{\log}^p -sommable et sans unité, des hypothèses suffisantes pour pouvoir exprimer les traces de Dixmier au moyen des fonctions (6.1.7).

Pour étudier cette question, formulons le problème dans un cadre sensiblement plus général. Soit toujours (\mathcal{N}, τ) une algèbre de von Neumann semi-finie, munie d'une trace fidèle, semi-finie et normale et soit maintenant $G \in \mathcal{N}_+$ un opérateur tel que $\ker(G) = \{0\}$. (Dans le cas d'un triplet spectral semi-fini, sans unité de dimension spectrale $p \geq 1$ et \mathcal{M}_{\log}^p -sommable $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, on prend $G = (1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}$.) La première étape consiste à construire une $*$ -algèbre de Banach $B(G) \subset \mathcal{N}$ qui soit telle que pour tout $a, b \in B(G)$, l'opérateur aGb appartienne $\mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)$. Pour ce faire, considérons les poids NSF (semi-finis, normaux et fidèles) suivants sur \mathcal{N} :

$$\zeta_s : \mathcal{N}_+ \rightarrow [0, \infty], \quad a \mapsto (s-1)\tau(G^{s/2}aG^{s/2}), \quad s > 1, \quad (6.2.1)$$

$$\xi_\lambda : \mathcal{N}_+ \rightarrow [0, \infty], \quad a \mapsto \lambda^{-1}\tau(e^{-(2\lambda G)^{-1}}ae^{-(2\lambda G)^{-1}}), \quad \lambda > 0. \quad (6.2.2)$$

Définissons aussi les normes

$$\|a\|_\zeta := \sup_{s>1} \zeta_s(a^*a)^{1/2}, \quad \|a\|_\xi := \sup_{\lambda>0} \left(M\xi(a^*a)\right)(\lambda)^{1/2},$$

où M désigne la moyenne de Cesàro du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* : $Mf(t) = \frac{1}{\log(t)} \int_1^t f(s) \frac{ds}{s}$. Posons finalement

$$B_\zeta(G) := \{a \in \mathcal{N} : \|a\|_\zeta + \|a^*\|_\zeta < \infty\} \quad \text{et} \quad B_\xi(G) := \{a \in \mathcal{N} : \|a\|_\xi + \|a^*\|_\xi < \infty\}.$$

Ces espaces permettent d'obtenir une théorie de l'intégration noncommutative dans le cadre semi-fini, sans unité et relativement à l'opérateur (fixé) G . Nous obtenons d'abord un analogue de la Proposition 6.1.11 :

Proposition 6.2.1. [16, Propositions 3.3, 3.8, 3.10 & Lemma 3.4]

1. Normés avec $[a \mapsto \|a\| + \|a\|_\zeta + \|a^*\|_\zeta]$ et $[a \mapsto \|a\| + \|a\|_\xi + \|a^*\|_\xi]$, les espaces $B_\zeta(G)$ et $B_\xi(G)$ deviennent des $*$ -algèbres de Banach.
2. $B_\zeta(G) = B_\xi(G)$ avec des normes équivalentes (par la suite, on le notera $B(G)$).

3. Si $a, b \in B(G)$, alors $bGa \in \mathcal{M}_{\text{log}}(\mathcal{N}, \tau)$. Pour $b = a^*$, nous avons l'estimation :

$$\int_0^t \mu_s(a^*Ga) ds \leq \|a^*e^{-G^{-1}}a\|_1 + \|a\|^2 + \|a\|_\xi^2 \log(1+t). \quad (6.2.3)$$

4. Si de plus la fonction $[\lambda \mapsto \xi_\lambda(a^*a)]$ est bornée, alors pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, $a^*G^\varepsilon a \in \mathcal{L}^{1/\varepsilon, \infty}(\mathcal{N}, \tau)$, avec

$$\mu_s(a^*G^\varepsilon a) \leq \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{\varepsilon} \|a\|^2 + \frac{1}{1-\varepsilon} \|\xi.(a^*a)\|_\infty \right) s^{-\varepsilon}.$$

Remarque 6.2.2. L'inégalité (3.2.11) est le point clé de la Proposition 6.2.1. Cette inégalité repose sur une analyse multi-échelle ainsi que sur l'égalité entre $\sigma(T, t) = \int_0^t \mu(T, s) ds$ et la fonctionnelle- K du couple de Banach $(\mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau), \mathcal{N})$:

$$K(T, t; \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau), \mathcal{N}) := \inf \left\{ \|T_1\|_1 + t\|T_2\|, T = T_1 + T_2, T_1 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau), T_2 \in \mathcal{N} \right\}.$$

Pour obtenir une formule permettant de calculer une trace de Dixmier à partir des fonctions (6.1.7) et du Théorème 6.1.13, on a besoin de contrôler la différence entre $a^*G^s a$ et $(a^*Ga)^s$ en norme de trace. Ce contrôle fait suite au résultat suivant :

Proposition 6.2.3. [16, Proposition 4.4] Soit $0 \leq a \in \mathcal{N}$ tel qu'il existe $\delta > 0$ avec $a^{1-\delta} \in B(G)$ et tel que $[G, a^{1-\delta}] \in \mathcal{M}_{\text{log}}^0(\mathcal{N}, \tau)$. On a alors

$$\lim_{s \searrow 1} (s-1) \|aG^s a - (aGa)^s\|_1 = 0.$$

Remarque 6.2.4. La proposition précédente constitue le coeur de notre approche. Sa preuve repose en particulier sur :

- Les inégalités de Ky Fan (voir [37] dans le cadre semi-fini) ;
- L'inégalité de Markus généralisée (voir [32] dans le cadre semi-fini) ;
- L'inégalité de Birman-Koplienko-Solomyak [12] ;
- Les inégalités d'opérateurs de [20, Lemma 3.3].

La proposition précédente ainsi que la version faible-* du Lemme de Karamata [20, Theorem 2.2], donne quasi directement la réponse à la question posée ici et fournit une version adaptée au cas localement compact du Théorème 6.1.13 :

Théorème 6.2.5. [16, Theorem 4.13] Soit $0 \leq a \in \mathcal{N}$ tel qu'il existe $\delta > 0$ avec $a^{1/2-\delta} \in B(G)$ et tel que $[G, a^{1-\delta}] \in \mathcal{M}_{\text{log}}^0(\mathcal{N}, \tau)$. On a alors pour tout état ω de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ invariant par exponentiations :

$$\tau_{\text{log}, \omega}(aG) = \omega \left(\left[r \mapsto \frac{\tau(aG^{1+\log(r)^{-1}})}{\log(1+r)} \right] \right) \quad (6.2.4)$$

$$= \omega \left(\left[\lambda \mapsto \frac{1}{\log(1+\lambda)} \int_0^\lambda \tau(ae^{-(tG)^{-1}}) \frac{dt}{t^2} \right] \right). \quad (6.2.5)$$

Si de plus, une des limites suivantes existe :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(1+t)} \int_0^t \mu_s(aG) ds ; \quad \lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1) \tau(aG^s) ; \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(1+\lambda)} \int_0^\lambda \tau(ae^{-(tG)^{-1}}) \frac{dt}{t^2},$$

alors elles existent toutes les trois et coïncident.

Le passage de $a \in B(G)$ positif à $a \in B(G)$ quelconque peut se faire en utilisant la décomposition de Jordan de a , mais dans les exemples particuliers on peut généralement en déduire le résultat du cas a quelconque directement à partir du cas a positif.

Concernant l'intégrale noncommutative dans le cadre des triplets spectraux sans unité, on en tire les conséquences suivantes :

Corollaire 6.2.6. [16, Proposition 4.14 & Corollary 6.4] Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, sans unité, de dimension spectrale $p \geq 1$ et \mathcal{M}_{\log} -sommable. Supposons que tout $a \in \mathcal{A}_+$ satisfasse $a = b^2$ avec $b \geq 0$ et $b^{1-\delta} \in B_p((1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2})$, $\delta > 0$, et avec $[b, (1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}] \in \mathcal{M}_{\log}^0(\mathcal{N}, \tau)$. Pour tout état ω de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ invariant par exponentiations, l'application

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \mapsto \tau_\omega(a(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}),$$

définit une trace positive sur \mathcal{A} . De plus on a

$$\begin{aligned} \tau_{\log, \omega}(a(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}) &= \omega\left(\left[r \mapsto \frac{\tau(a(1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2(1+\log(r)^{-1})})}{\log(1+r)}\right]\right) \\ &= \omega\left(\left[\lambda \mapsto \frac{1}{\log(1+\lambda)} \int_0^\lambda \tau\left(ae^{-t^{-1}(1+\mathcal{D}^2)^{p/2}}\right) \frac{dt}{t^2}\right]\right). \end{aligned}$$

Remarques 6.2.7. Dans le cadre des triplets spectraux, l'hypothèse $[b, (1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}] \in \mathcal{M}_{\log}^0(\mathcal{N}, \tau)$ se vérifie en général facilement en montrant que $[b, (1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2}] \in \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau)$, ce qui est suffisant car $\mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau) \subset \mathcal{M}_{\log}^0(\mathcal{N}, \tau)$. Notons aussi que nous n'avons pas besoin d'hypothèse d'existence d'unités locales comme c'est le cas dans, par exemple, [38, 78], ni même d'hypothèse de σ -unitalité pour A . Le Théorème 6.2.5 (et son Corollaire) simplifie considérablement certains résultats que j'ai obtenu dans ma thèse, en particulier [38, Proposition 4.17] et [40, Theorem 6.1]. Ce résultat est aussi utilisé dans [44, Theorem 14], et dans [52, Theorem 5.4].

6.3 Cas localement compact et \mathcal{M}_ψ^p -sommable

Ce paragraphe est une synthèse des résultats obtenus dans l'article [43], travail en commun avec Fedor Sukochev, dans lequel nous donnons une généralisation du Théorème 6.1.13 dans le cas d'un espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ quelconque. Afin de séparer les difficultés, nous nous restreignons ici au cas compact. La nouveauté de notre approche repose sur l'utilisation d'un foncteur d'extrapolation.

6.3.1 Positionnement du problème

La problème que nous abordons ici est de savoir si il existe toujours un lien entre traces de Dixmier, fonctions ζ et semi-groupes de la chaleur pour un espace de Marcinkiewicz général. Plus précisément, ce que l'on cherche à déterminer c'est la classe des espaces de Marcinkiewicz pour lesquels les traces de Dixmier restent proportionnelles à l'évidente généralisation des membres de droite des égalités (6.1.5) et (6.1.6), c'est-à-dire à

$$\omega\left(\left[r \mapsto \frac{\tau(T^{1+\log(r)^{-1}})}{\psi(r)}\right]\right), \quad (6.3.1)$$

et à

$$\omega\left(\left[\lambda \mapsto \frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^\lambda \tau\left(e^{-(tT)^{-1}}\right) \frac{dt}{t^2}\right]\right), \quad (6.3.2)$$

Cette question est tout à fait naturelle étant donnée que les espaces $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$, avec $\psi \neq \log$, apparaissent naturellement dans de multiples situations :

- Si $T_j \in \mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}_j, \tau_j)$, $j = 1, 2$, alors $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{M}_{\log^2}(\mathcal{N}_1 \overline{\otimes} \mathcal{N}_2, \tau_1 \otimes \tau_2)$. Plus généralement, si $T_j \in \mathcal{M}_{\psi_j}(\mathcal{N}_j, \tau_j)$, $j = 1, 2$, alors $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}_1 \overline{\otimes} \mathcal{N}_2, \tau_1 \otimes \tau_2)$ avec $\psi(t) = \sup_{t_1 t_2 = t} \psi_1(t_1) \psi_2(t_2)$;
- Si $T \in \mathcal{N}$ est tel que $\tau(e^{-tT^{-1}}) = O(t^{-1} |\log t|^\beta)$, alors $T \in \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ avec $\psi(t) = \log(1+t)^{1+\beta}$ si $\beta > -1$ et avec $\psi(t) = \log(1 + \log(1+t))$ si $\beta = -1$.
- Si $0 \leq f \in \mathcal{M}_{\log^n}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{M}_{\log^m}(\mathbb{R}^d)$ (pour X un espace mesuré, $\mathcal{M}_\psi(X)$ désigne l'espace de Marcinkiewicz associé à l'algèbre de von Neumann commutative $L^\infty(X)$ avec comme trace l'intégrale de Lebesgue), alors $f^{1/2}(X)g(i\nabla)f^{1/2}(X) \in \mathcal{M}_{\log^{n+m}}(\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d)))$, généralisation naturelle de la version symétrisée de l'inégalité de Cwikel [86, Chapter 4].

Rappelons que la condition la plus faible possible sur $\psi \in \Omega$ garantissant l'existence de traces singulières supportées à l'infini sur $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ est donnée par (6.1.3). Cette condition utilise une limite inférieure et est donc extrêmement difficile à manipuler. Une condition plus forte et largement plus utilisée (c'est en particulier celle qui a été utilisée dans [31]) consiste à remplacer la limite inférieure par la limite ordinaire :

$$\forall a > 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(at)}{\psi(t)} = 1. \quad (6.3.3)$$

Mentionnons la condition plus forte encore (et presque aussi largement répandue que la précédente) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t\psi(t))}{\psi(t)} = 1, \quad (6.3.4)$$

La condition que nous allons imposer ici est encore plus forte que la précédente :

$$\forall \alpha > 1, \quad \text{la limite } A_\psi(\alpha) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t^\alpha)}{\psi(t)} \text{ existe.} \quad (6.3.5)$$

Remarque 6.3.1. La condition (6.3.5) peut se traduire par l'existence d'un indice d'exponentiation, dans le sens où lorsqu'elle est vérifiée, on a alors $A_\psi(\alpha) = \alpha^{\log A_\psi(e)}$. La constante

$$k_\psi := \log(A_\psi(e)), \quad (6.3.6)$$

va d'ailleurs jouer un rôle central dans ce qui suit. Observons aussi que $A_\psi(e) \geq 1$, donc $k_\psi \geq 0$ et que si $A_\psi(\alpha) = 1$ pour un certain $\alpha > 1$, alors $A_\psi(\alpha) = 1$ pour tous les $\alpha > 1$.

6.3.2 Une méthode d'extrapolation

Les techniques que nous avons développées pour étendre le Théorème 6.1.13 à des espaces de Marcinkiewicz plus généraux reposent sur une méthode d'extrapolation que

nous allons décrire maintenant. Rappelons qu'un espace de Banach $F \subset L^1(\mathbb{R}_+^*) + L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ est dit symétrique si pour tous $x \in F$ et $y \in L^1(\mathbb{R}_+^*) + L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ alors $|y| \leq |x|$ implique $y \in F$ avec $\|y\|_F \leq \|x\|_F$ et $\mu(y, \cdot) = \mu(x, \cdot)$ implique $y \in F$ avec $\|y\|_F = \|x\|_F$. Si de plus $\int_0^t \mu(y, s) ds \leq \int_0^t \mu(x, s) ds$ implique $y \in F$ avec $\|y\|_F \leq \|x\|_F$, F sera dit pleinement symétrique. Ces définitions s'étendent naturellement au cadre des espaces de Banach d'opérateurs mesurables contenus dans $\mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau) + \mathcal{N}$.

Définition 6.3.2. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach symétrique de classes de fonctions mesurables sur \mathbb{R}_+^* . Pour un opérateur τ -mesurable T , on considère la fonction numérique suivante :

$$\eta_T := \left[p \in (1, \infty) \mapsto \|T\|_p \right], \quad (6.3.7)$$

puis l'espace de Banach d'opérateurs τ -mesurables associé :

$$\mathfrak{L}_F(\mathcal{N}, \tau) := \left\{ T \in \mathcal{L}_0(\mathcal{N}, \tau) : \|T\|_{\mathfrak{L}_F} := \|\eta_T\|_F < \infty \right\}. \quad (6.3.8)$$

On peut montrer que l'espace \mathfrak{L}_F partage la plupart des propriétés de F et est toujours un espace pleinement symétrique. On va définir maintenant ce que l'on entend par espace extrapolé.

Définition 6.3.3. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}_0(\mathcal{N}, \tau)$ un espace de Banach pleinement symétrique d'opérateurs τ -mesurables. On dira que \mathcal{E} est un espace extrapolé si il existe un espace de Banach symétrique F de classes de fonctions mesurables sur \mathbb{R}_+^* tel que $\mathcal{E} = \mathfrak{L}_F$ avec des normes équivalentes. On définira alors \mathcal{X}_1 comme la classe des espaces extrapolés qui sont proches de $\mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau)$, c'est-à-dire tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}^p(\mathcal{N}, \tau)$ continûment pour tout $p > 1$, et $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau)$.

Pour $\psi \in \Omega$, c'est-à-dire $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction concave et croissante satisfaisant à la propriété (6.1.1), on pose alors

$$F^\psi := \left\{ f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurable} : \|f\|_{F^\psi} := \operatorname{ess\,sup}_{p>1} \frac{|f(p)|}{\|\psi'\|_p} < \infty \right\},$$

$$F_\psi := \left\{ f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurable} : \|f\|_{F_\psi} := \operatorname{ess\,sup}_{p>1} \frac{|f(p)|}{\psi(e^{(p-1)^{-1}})} < \infty \right\},$$

et conséquemment, on définit les espaces extrapolés associés :

$$\mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau) := \mathfrak{L}_{F^\psi}(\mathcal{N}, \tau) \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) := \mathfrak{L}_{F_\psi}(\mathcal{N}, \tau).$$

Notre premier résultat établit que les espaces $\mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau)$ et $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ encadrent toujours l'espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$, sans aucune restriction sur $\psi \in \Omega$:

Proposition 6.3.4. [43, Proposition 2.13] Soit $\psi \in \Omega$. Alors $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) \subset \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) \subset \mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau)$, avec

$$\|\cdot\|_{\mathfrak{L}^\psi} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}_\psi} \leq \max \left\{ e, \frac{\psi(1)}{\psi'(1)} \right\} \|\cdot\|_{\mathfrak{L}_\psi}.$$

Ce que l'on cherche à comprendre maintenant, ce sont les conditions sur $\psi \in \Omega$ qui garantissent l'égalité $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$. En effet, ce n'est que dans ce cadre là que nous pourrons formuler nos résultats car la fonctionnelle (6.3.1) n'est bien définie que pour $T \in \mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$. De manière assez surprenante, on montre qu'une condition nécessaire pour avoir $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ est d'avoir $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau)$:

Proposition 6.3.5. [43, Proposition 2.16] *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) \in \mathcal{X}_1$,
2. $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau)$,
3. *Il existe $c, C > 0$ tels que pour tout $t > 0$,*

$$c \sup_{p>1} \frac{t^{1/p-1}}{\|\psi'\|_p} \leq \frac{1}{\psi(t)} \leq C \sup_{p>1} \frac{t^{1/p-1}}{\|\psi'\|_p}.$$

Remarque 6.3.6. Les deux propositions précédentes sont basées sur les méthodes de [3], où est traité le cas dual et commutatif des espaces de Marcinkiewicz proches de $L^\infty[0, 1]$. En particulier, l'équivalence entre les deux premières conditions de la Proposition 6.3.5 résulte du fait que l'espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}_\psi(\mathbb{R}_+^*)$ est le plus grand espace symétrique ayant pour fonction fondamentale $\varphi(t) = t\psi(t)^{-1}$.

Remarque 6.3.7. La Proposition 6.3.5 nous dit en particulier qu'on ne peut pas avoir

$$\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) \subsetneq \mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau),$$

mais les trois autres situations sont a priori possibles. En particulier, l'égalité $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ est équivalente à $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau)$.

En utilisant une inégalité de concavité, on déduit une condition élémentaire, suffisante pour obtenir la double égalité $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau)$:

Proposition 6.3.8. [43, Proposition 2.20] *Supposons que pour tout $\delta > 0$, l'application $[t \mapsto t^{-\delta}\psi(t)]$ soit décroissante et qu'il existe $\rho > 0$ tel que la fonction $[t \mapsto \psi(\exp(t^\rho))]$ soit toujours concave. On a alors $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau)$.*

Remarque 6.3.9. La proposition précédente implique que $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ pour $\psi(t) = \log(1 + \log(1 + \dots \log(1 + t) \dots))^\beta$, $\beta > 0$.

6.3.3 Traces de Dixmier et fonctions ζ

Dans le cas où $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathfrak{L}^\psi(\mathcal{N}, \tau)$, le lien entre les traces de Dixmier et les fonctionnelles (6.3.1) repose sur le résultat suivant, une variante du Lemme de Karamata, généralisant [20, Theorem 2.2]. C'est précisément pour pouvoir utiliser ce résultat que nous avons besoin de la condition (6.3.5).

Lemme 6.3.10. [43, Proposition 3.2] *Soit $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ une fonction mesurable telle qu'il existe $k \geq 0$ avec*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r/n)}{\varphi(r)} = n^{-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (6.3.9)$$

et soit $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ une fonction croissante et continue à droite telle que

$$\left[r \mapsto \frac{1}{\varphi(r)} \int_0^\infty e^{-t/r} d\beta(t) \right] \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*). \quad (6.3.10)$$

Alors, pour tout état $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+^)^*_+$ invariant par dilatations, on a :*

$$\omega\left(\left[r \mapsto \frac{\beta(r)}{\varphi(r)}\right]\right) = \frac{1}{\Gamma(1+k)} \omega\left(\left[r \mapsto \frac{1}{\varphi(r)} \int_0^\infty e^{-t/r} d\beta(t)\right]\right). \quad (6.3.11)$$

Remarque 6.3.11. La version ordinaire du Lemme de Karamata se déduit du Lemme 6.3.10 pour $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, et lorsque la fonction donnée dans (6.3.10) converge à l'infini. Pour $\varphi = \text{Id}$, ce résultat est démontré dans [20, Theorem 2.2].

Soit maintenant $\psi \in \Omega$ satisfaisant à (6.3.5). En posant $\varphi := \psi \circ \exp$, on trouve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r/n)}{\varphi(r)} = n^{-k_\psi},$$

où k_ψ est donnée dans (6.3.6). En considérant ensuite la fonction $\beta(t) := \tau(T E_T(e^{-t}))$, où E_T est la famille spectrale de $T \geq 0$, on se retrouve exactement dans le cadre du Lemme 6.3.10. En effectuant quelques manipulations classiques utilisant les propriétés des limites généralisées, on en déduit une première partie du résultat cherché :

Théorème 6.3.12. [43, Theorem 3.4] *Supposons que $\psi \in \Omega$ satisfasse à la condition (6.3.5) et que de plus $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$. Alors, pour tout ω , état de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ invariant par exponentiations, tout $T \in \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)^+$ et tout $B \in \mathcal{N}$, on a*

$$\tau_{\psi, \omega}(BT) = \frac{1}{\Gamma(1 + k_\psi)} \omega \left(\left[r \mapsto \frac{\tau(BT^{1+1/\log(r)})}{\psi(r)} \right] \right), \quad (6.3.12)$$

où la constante k_ψ est donnée dans (6.3.6).

Remarque 6.3.13. Notons que nos conditions sur $\psi \in \Omega$ sont vraisemblablement nécessaires aussi. En effet, pour que le membre de droite de l'égalité (6.3.12) soit défini, il faut que la condition d'égalité $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ soit satisfaite et que la constante k_ψ existe.

Par exemple, pour $\psi(t) = \log(1 + t^{1/\beta})^\beta$, $\beta > 0$, la condition (6.3.5) est satisfaite avec $k_\psi = \beta$ et on a aussi $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ d'après la Proposition 6.3.8. Ainsi, le Théorème 6.3.12 donne pour tout $T \in \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)^+$, $B \in \mathcal{N}$ et tout état ω invariant par exponentiations :

$$\tau_{\psi, \omega}(BT) = \frac{\beta^\beta}{\Gamma(1 + \beta)} \omega \left(\left[r \mapsto \frac{\tau(BT^{1+\frac{1}{\log(r)}})}{\log(r)^\beta} \right] \right).$$

En particulier, lorsque $\beta = n \in \mathbb{N}$, et lorsque qu'elle est méromorphe, la fonction ζ d'un opérateur $T \in \mathcal{M}_{\log^n}(\mathcal{N}, \tau)^+$ a un pôle d'ordre au plus n en $z = 1$. Cela généralise un fait bien connu : lorsque qu'elle est méromorphe, la fonction ζ d'un opérateur $T \in \mathcal{M}_{\log}(\mathcal{N}, \tau)^+$ a un pôle au plus simple en $z = 1$.

Un autre exemple est celui de la fonction $\psi(t) = \log(1 + \log(1 + t))$. Dans ce cas, $k_\psi = 0$ et $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ d'après la Proposition 6.3.8. Ainsi, pour tout $T \in \mathcal{M}_{\log \circ \log}(\mathcal{N}, \tau)^+$, $B \in \mathcal{N}$ et tout état ω invariant par exponentiations, on a :

$$\tau_{\psi, \omega}(BT) = \omega \left(\left[r \mapsto \frac{\tau(BT^{1+\frac{1}{\log(r)}})}{\log(\log(r))} \right] \right).$$

6.3.4 Traces de Dixmier et semi-groupe de la chaleur

Pour relier maintenant la trace de Dixmier à la fonctionnelle (6.3.2), il est naturel d'introduire la classe des opérateurs τ -mesurables suivante :

Définition 6.3.14. *Pour $\psi \in \Omega$, on définit $\mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ comme étant l'ensemble des éléments de \mathcal{N} tels que :*

$$\sup_{\lambda > 0} \frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^\lambda \tau(e^{-u^{-1}|T|^{-1}}) \frac{du}{u^2} < \infty. \quad (6.3.13)$$

Bien évidemment, on a

$$\int_0^\lambda \tau(e^{-u^{-1}|T|^{-1}}) \frac{du}{u^2} = \tau(|T|e^{-\lambda^{-1}|T|^{-1}}),$$

de telle sorte que la condition (6.3.13) est équivalente à

$$\left[\lambda \mapsto \frac{\tau(|T|e^{-\lambda^{-1}|T|^{-1}})}{\psi(\lambda)} \right] \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*).$$

Mais cette observation n'est guère utile au vu de nos motivations qui consistent à dériver des formules pour les traces de Dixmier à partir de l'asymptotique du noyau de la chaleur. La façon correcte de comprendre la condition (6.3.13) est la suivante. On écrit tout d'abord

$$\frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^\lambda \tau(e^{-u^{-1}|T|^{-1}}) \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^\lambda \frac{\tau(e^{-u^{-1}|T|^{-1}})}{u^2 \psi'(u)} \psi'(u) du.$$

Ensuite, avec C l'opérateur de Cesàro du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$:

$$C : L^\infty(\mathbb{R}_+^*) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad f \mapsto \left[\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(u) du \right].$$

l'opérateur

$$C_\psi : L^\infty(\mathbb{R}_+^*) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad f \mapsto \left[\lambda \mapsto \frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^\lambda f(u) \psi'(u) du \right],$$

n'est rien d'autre que la moyenne de Cesàro conjugué par ψ : $C_\psi(f) = (M_+(f \circ \psi^{-1})) \circ \psi$. Ainsi, on en déduit qu'une condition suffisante pour avoir $T \in \mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ est donnée par :

$$\left[\lambda \mapsto \frac{\tau(e^{-\lambda^{-1}|T|^{-1}})}{\lambda^2 \psi'(\lambda)} \right] \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*).$$

Par exemple, une majoration du type

$$\tau(e^{-t|T|^{-1}}) \leq Ct^{-1} |\log t|^\beta, \quad \beta \geq -1,$$

implique que $T \in \mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ pour $\psi(t) = \log(1 + t^{1/(1+\beta)})^{1+\beta}$, lorsque $\beta > -1$. Lorsque $\beta = -1$ cela implique que $T \in \mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ pour $\psi(t) = \log(1 + \log(1 + t))$.

Le résultat suivant donne un encadrement de $\mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ qui, ici aussi, est valable sans aucune condition sur $\psi \in \Omega$.

Proposition 6.3.15. [43, Propositions 4.3 et 4.4] Soit $\psi \in \Omega$. Alors $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) \subset \mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau) \subset \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$. Plus précisément, on a pour $T \in \mathcal{N}$:

$$\|T\|_{\mathcal{M}_\psi} \leq \|T\| \sup_{\lambda \in (0,1)} \frac{\lambda}{\psi(\lambda)} + \sup_{\lambda \geq 1} \frac{1}{\psi(\lambda)} \left(\int_0^\lambda \tau(e^{-u^{-1}|T|^{-1}}) \frac{du}{u^2} + 1 \right),$$

et

$$\frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^\lambda \tau(e^{-u^{-1}T^{-1}}) \frac{du}{u^2} \leq e \psi(\lambda)^{1/\log(\lambda)} \|T\|_{\mathfrak{L}_\psi}^{1+1/\log(\lambda)}.$$

Notons aussi que la condition (6.3.4) est intimement liée à l'espace $\mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$:

Proposition 6.3.16. [43, Corollary 4.6] Si $\psi \in \Omega$ satisfait la condition (6.3.4), alors $\mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$.

On en déduit ainsi que la condition (6.3.4) est nécessaire pour avoir une égalité entre les traces de Dixmier et les fonctionnelles (6.3.2). Cela dit, étant donné que nous nous servons du Lemme 6.3.10 pour identifier les fonctionnelles (6.3.2) et (6.3.1), nous sommes contraint d'utiliser la condition plus forte (6.3.5) dans le résultat suivant :

Théorème 6.3.17. [43, Theorem 4.7] Supposons que $\psi \in \Omega$ satisfasse à la condition (6.3.5) et que de plus $\mathfrak{L}_\psi(\mathcal{N}, \tau) = \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$. Alors, pour tout ω , état de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ invariant par exponentiations, tout $T \in \mathcal{M}_\psi(\mathcal{N}, \tau)^+$ et tout $B \in \mathcal{N}$, on a

$$\tau_{\psi, \omega}(BT) = \omega \left(\left[\lambda \mapsto \frac{1}{\psi(\lambda)} \int_1^\lambda \tau(Be^{-t^{-1}T^{-1}}) \frac{dt}{t^2} \right] \right).$$

6.3.5 Application aux opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^n

Nous allons maintenant donner une application de nos résultats aux opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbb{R}^n . Les résultats que nous avons obtenus dans ce cadre-là, sont inspirés des travaux de Nicola et Rodino [71] et les généralisent dans plusieurs directions :

- Nos résultats s'appliquent à tous les espaces $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n)), \text{Tr})$, avec $\psi \in \Omega$ satisfaisant aux conditions du Théorème 6.3.12, et non pas seulement à l'espace L^1 -faible sur $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ comme c'est le cas dans [71] ;
- Nos hypothèses sur la fonction de Planck (définie dans (6.3.15)) sont beaucoup plus faibles que celles utilisées dans [71] ;
- Nous sommes capables de donner une formule pour la trace de Dixmier d'un opérateur pseudo-différentiel à partir de son symbole.

On se place ici dans le cadre du calcul pseudo-différentiel de Weyl avec des symboles dans les classes d'Hörmander. Rappelons que l'action d'un opérateur pseudo-différentiel $\text{OP}_W(T)$, de symbole $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$, dans le schéma de la quantification de Weyl sur un vecteur $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est donnée par :

$$\left(\text{OP}_W(T)\phi \right)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\xi \cdot (x-y)} T\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \phi(y) d^n y d^n \xi.$$

L'aspect le plus important concernant la quantification de Weyl est qu'elle transforme un symbole réel en un opérateur auto-adjoint et qu'elle réalise une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ sur l'espace de Hilbert des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous considérons ici des symboles dans les classes de Hörmander $S(m, g)$. Rappelons que l'espace $S(m, g)$ est associé à une métrique g à variation lente et σ -tempérée sur \mathbb{R}^{2n} et à une fonction poids $m : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, g -continue et (σ, g) -tempérée (voir [51, Definition 18.5.1] pour plus de détails). Les espaces $S(m, g)$ sont Fréchet pour la topologie associée aux semi-normes :

$$\|f\|_{k; m, g} := \sup \frac{|f^{(k)}((x, \xi); X_1, \dots, X_k)|}{m(x, \xi) g_{x, \xi}(X_1)^{1/2} \dots g_{x, \xi}(X_k)^{1/2}} < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6.3.14)$$

où la borne supérieure est prise sur $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et sur $X_1, \dots, X_k \in T_{(x, \xi)}\mathbb{R}^{2n}$ et $f^{(k)}((x, \xi); \cdot, \dots, \cdot)$ est la forme multi-linéaire sur $T_{(x, \xi)}\mathbb{R}^{2n}$, donnée par la différentielle d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de la fonction f au point $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. On note $\text{OPS}(m, g)$ l'espace des opérateurs pseudo-différentiels de Weyl avec des symboles dans la classe de Hörmander $S(m, g)$. On définit aussi g^σ , la métrique symplecto-dual de g , par :

$$g_{x, \xi}^\sigma(t, \tau) := \sup \left\{ \sigma(t, \tau; y, \eta)^2 : g_{x, \xi}(y, \eta) = 1 \right\}, \quad (x, \xi), (t, \tau) \in \mathbb{R}^{2n},$$

où σ est la forme symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n} \simeq T^*\mathbb{R}^n$. On pose finalement h_g , la fonction de Planck, définie par :

$$h_g^2(x, \xi) := \sup_{(t, \tau) \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{g_{x, \xi}(t, \tau)}{g_{x, \xi}^\sigma(t, \tau)}. \quad (6.3.15)$$

Nous supposons ici que $h_g \in L^q \cap L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $q > 1$. Cette hypothèse est strictement plus faible que celle utilisée dans [71], où les auteurs supposent que $h_g(x, \xi) \leq C(1 + |x| + |\xi|)^{-\delta}$.

Rappelons les faits importants du calcul de Hörmander-Weyl (pour les détails et définitions précises, on pourra consulter [51, Chapter XVIII]) :

- OP_W envoie continûment $S(m, g)$ dans $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ si et seulement si $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ [51, Theorem 18.6.3] ;
- OP_W envoie continûment $S(m, g)$ dans $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^n))$ si et seulement si $\lim_{\infty} m = 0$ [51, Theorem 18.6.6] ;
- On a l'estimation en norme de trace suivante [50, Theorem 3.9] : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ telle que pour tout $f \in S(m, g)$, on a

$$\|\text{OP}_W(f)\|_1 \leq C_k (\|f\|_1 + \|h_g^k m\|_1 \|f\|_{k; m, g}) ; \quad (6.3.16)$$

- Finalement, [51, Theorem 18.5.4], on a

$$\text{OPS}(m_1, g) \text{OPS}(m_2, g) \subset \text{OPS}(m_1 m_2, g),$$

et si $f_j \in S(m_j, g)$, $j = 1, 2$, alors

$$\text{OP}_W(f_1) \text{OP}_W(f_2) - \text{OP}_W(f_1 f_2) \in \text{OPS}(m_1 m_2 h_g, g). \quad (6.3.17)$$

Les propriétés suivantes, issues de [71], sont à la base de nos résultats :

Proposition 6.3.18. [71, Lemma 3.2 & Theorem 3.3] *Soit (g, m) comme précédemment. Supposons de plus que $\lim_{(x, \xi) \rightarrow \infty} m(x, y) = 0$ et qu'il existe $q \geq 1$ tel que $h_g \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \cap L^q(\mathbb{R}^{2n})$. Alors :*

1. Il existe $c > 0$, tel qu'en posant $\tilde{m} := (c + m^{-1})^{-1}$, l'opérateur $\text{OP}_W(\tilde{m}^{-1})$ est positif et inversible, d'inverse dans $\text{OPS}(m, g)$ (donc compact).
2. Pour tout $t > 0$, on a

$$e^{-t \text{OP}_W(\tilde{m}^{-1})} = \text{OP}_W(b_t) + S_t,$$

où $\{b_t\}_{t>0}$ est une famille bornée dans $S(1, g)$, satisfaisant $|b_t| \leq C e^{-t\tilde{m}/2}$ et où $\{S_t\}_{t>0}$ est une famille d'opérateurs à trace satisfaisant à $\|S_t\|_1 \leq C t$.

À partir du résultat précédent et en utilisant une méthode de comparaison à l'opérateur modèle $\text{OP}_W(\tilde{m}^{-1})^{-1}$, on montre facilement que si m satisfait à la condition :

$$\sup_{\lambda>0} \frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^\lambda \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-t^{-1}m^{-1}(x,\xi)} d^n x d^n \xi \frac{dt}{t^2} < \infty, \quad (6.3.18)$$

alors, $\text{OPS}(m, g) \subset \mathcal{M}_\psi(L^2(\mathbb{R}^n))$ continûment. En utilisant la Définition 6.3.14, on voit que la condition précédente signifie que la fonction poids m appartient à l'espace $\mathcal{C}_\psi(\mathbb{R}^{2n})$, i.e. l'espace $\mathcal{C}_\psi(\mathcal{N}, \tau)$ pour $\mathcal{N} = L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et τ donnée par l'intégrale de Lebesgue. Ainsi, quand $\psi \in \Omega$ satisfait à la condition (6.3.4), le Corollaire 6.3.16 montre que cet espace coïncide avec l'espace de Marcinkiewicz commutatif $\mathcal{M}_\psi(\mathbb{R}^{2n})$. On obtient alors le résultat d'existence suivant :

Théorème 6.3.19. [43, Theorem 5.4] *Supposons que $\psi \in \Omega$ satisfasse à la condition (6.3.4), qu'il existe $q > 1$ tel que $h_g \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \cap L^q(\mathbb{R}^{2n})$ et que $m \in \mathcal{M}_\psi(\mathbb{R}^{2n})$. On a alors $\text{OPS}(m, g) \subset \mathcal{M}_\psi(L^2(\mathbb{R}^n))$ continûment.*

Dans la suite, on utilisera la notation $\int_{\psi, \omega}$ pour désigner la trace de Dixmier (associée à ψ et ω) pour l'algèbre de von Neumann commutative $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ avec l'intégrale de Lebesgue pour trace. On appellera cette trace de Dixmier particulière, l'intégrale de Dixmier. En combinant le Théorème 6.3.17 avec la Proposition 6.3.18, on déduit que lorsqu'elle existe, la trace de Dixmier d'un opérateur pseudo-différentiel d'Hörmander-Weyl coïncide avec l'intégrale de Dixmier de son symbole. Ce résultat complète une propriété classique dans le calcul de Weyl : lorsqu'elle existe, la trace d'un opérateur pseudo-différentiel coïncide avec l'intégrale de son symbole.

Théorème 6.3.20. [43, Theorem 5.6] *Supposons que $\psi \in \Omega$ satisfasse à la condition (6.3.5), que $\mathfrak{L}_\psi = \mathcal{M}_\psi$, qu'il existe $q > 1$ tel que $h_g \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \cap L^q(\mathbb{R}^{2n})$ et que $m \in \mathcal{M}_\psi(\mathbb{R}^{2n})$. Alors, pour tout symbole $f \in S(m, g)$ et tout ω état de $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ invariant par exponentiations, on a :*

$$\text{Tr}_{\psi, \omega}(\text{OP}_W(f)) = \int_{\psi, \omega} f.$$

On combinant les Théorèmes 6.3.12 et 6.3.20, on déduit finalement une méthode simple pour le calcul de la trace de Dixmier d'un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^n :

Corollaire 6.3.21. [43, Corollary 5.7] *Sous les hypothèses du Théorème 6.3.20, on a :*

$$\text{Tr}_{\psi, \omega}(\text{OP}_W(f)) = \frac{1}{\Gamma(1 + k_\psi)} \omega\left(\left[r \mapsto \frac{1}{\psi(r)} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x, \xi) |f(x, \xi)|^{1/\log(r)} d^n x d^n \xi\right]\right),$$

où k_ψ est la constante associée à $\psi \in \Omega$ donnée dans (6.3.6).

Remarque 6.3.22. Il est très vraisemblable que les résultats de ce paragraphe s'étendent au cas des opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés Riemanniennes à géométrie bornée avec des symboles dans les classes de Shubin [85].

Chapitre 7

Théorie de l'indice pour les espaces noncommutatifs semi-finis et localement compacts

7.1 Le problème de l'indice

Dans ce qui suit, on considère toujours une algèbre de von Neumann semi-finie \mathcal{N} , représentée fidèlement sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et munie d'une trace normale, fidèle et semi-finie τ . Soit aussi $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-finis et sans unité. Ici, on supposera aussi \mathcal{A} séparable. Un peu plus loin, on supposera aussi que $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est finiment sommable de dimension spectrale $p \geq 1$ (voir Définition 6.1.8).

7.1.1 L'application indice en KK -théorie

Naïvement, on voudrait à partir d'un triplet spectral semi-finis, sans unité $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ et de parité $*$ = 0, 1, définir une classe $[(X, F)]$ dans $KK^*(A, \mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau))$ de la façon suivante :

- $X := \mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ vu comme un C^* -module à droite sur lui-même ;
- A , la C^* -complétion de \mathcal{A} , agit sur X par multiplication à gauche ;
- $F := \mathcal{D}(\varepsilon + \mathcal{D}^2)^{-1/2}$, $\varepsilon > 0$.

Cependant, cette classe n'est pas bien définie en général car $\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$, vu comme C^* -module sur lui-même, n'est en général pas dénombrablement engendré. En effet, nous avons $\text{End}_{\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)}^0(\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)) = \mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ alors que $\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ n'est en général pas σ -unital. Pour palier à ce problème, on peut tout simplement remplacer $\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ par C , sa sous- C^* -algèbre engendrée par les opérateurs suivants :

$$[F, a], \quad b[F, a], \quad F[F, a], \quad Fb[F, a], \quad a\varphi(\mathcal{D}), \quad a, b \in \mathcal{A}, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}).$$

Évidemment, lorsque \mathcal{A} est séparable C est une sous- C^* -algèbre séparable de $\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ et on a donc une classe $[(C, F)]$ bien définie dans $KK^*(A, C)$ (de même parité que celle de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ et indépendante de ε) à laquelle est maintenant associée une application indice en K -théorie via le produit de Kasparov :

$$K_*(A) = KK^*(\mathbb{C}, A) \rightarrow K_0(C), \quad [x] \mapsto [x] \otimes_A [(X, F)]. \quad (7.1.1)$$

On sait d'après [53, Theorem 18.4.4] que $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \tau)$, l'idéal engendré par les projections de traces finies, est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$. Comme de plus $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \tau)$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$, $C \cap \mathcal{F}(\mathcal{N}, \tau)$ est dense dans C et est stable par calcul fonctionnel holomorphe. Ainsi, tout élément de $K_0(C)$ est de la forme $[e] - [f]$ où $e, f \in M_n(C \cap \mathcal{F}(\mathcal{N}, \tau) \oplus \mathbb{C})$. Finalement, comme $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \tau) \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau)$, la trace τ induit un homomorphisme :

$$\tau_* : K_0(C) \rightarrow \mathbb{R}.$$

En composant cet homomorphisme avec l'application indice en K -théorie, on obtient une application "indice numérique", que l'on voit comme un couplage entre la classe d'un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ en KK -théorie avec la K -théorie de A :

$$\langle \cdot, [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle : K_*(A) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (7.1.2)$$

7.1.2 L'application indice numérique

On va maintenant relier notre application "indice numérique" à un vrai problème de l'indice au sens Brauer-Fredholm [13, 14] (voir aussi [74] dans le cas où \mathcal{N} n'est pas un facteur). Rappelons qu'un opérateur $T \in \mathcal{N}$ est τ -Fredholm si son image dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{N}/\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ est inversible. L'indice de Brauer d'un opérateur τ -Fredholm T est alors défini par

$$\tau\text{-Index}(T) = \tau(Q_{\ker T}) - \tau(Q_{\ker T^*})$$

où $Q_{\ker T}$ sont $Q_{\ker T^*}$ les projections sur les noyaux de T et de T^* .

Remarque 7.1.1. L'indice de Brauer possède les mêmes propriétés fonctorielles que son homologue dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mais prend des valeurs réelles.

Notre objectif est alors de trouver un représentant de la classe $[(X, F)] \in KK^*(A, C)$ construite précédemment, donnant lieu à des opérateurs τ -Fredholm et tel que le couplage $\langle [x], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle$, $[x] \in K_*(A)$ calcule cet indice. Nous devons pour cela modifier \mathcal{D} pour le rendre inversible, sans pour autant changer de classe dans $KK^*(A, C)$. On obtiendra alors un module de Kasparov normalisé, c'est-à-dire tel que $F^2 = 1$. (On sait d'après [25, Proposition 12] qu'à une addition d'un module dégénéré près, tout module de Kasparov est opérateur-homotope à un module de Kasparov normalisé.) Observons que dans notre situation le noyau de l'opérateur \mathcal{D} peut être de dimension infinie (c'est d'ors et déjà le cas pour un triplet spectral semi-fini et unifié ou encore pour un triplet spectral ordinaire et sans unité) et que l'astuce habituelle consistant à ajouter à l'espace de Hilbert \mathcal{H} une copie supplémentaire du noyau de \mathcal{D} ne fonctionne plus. On suit alors la construction donnée dans [26, P. 68] du triplet spectral "double" : on fixe un paramètre de masse $\mu > 0$ et on effectue les transformations

$$\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}_\mu := \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mu \\ \mu & -\mathcal{D} \end{pmatrix}, \quad a \mapsto \hat{a} := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Plus généralement, lorsque x est un élément de $M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$, on pose

$$\hat{x} := \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \pi_n(x) \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}),$$

où $\pi_n : M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ est l'application quotient. Comme \mathcal{D}_μ est inversible, on peut poser $F_\mu := \mathcal{D}_\mu |\mathcal{D}_\mu|^{-1}$. On montre alors facilement que la classe de $(C \oplus C, F_\mu)$ coïncide avec celle de (C, F) dans $KK^*(A, C)$. On pose aussi $P_\mu := (1 + F_\mu)/2$ dans le cas impair et on utilise la graduation $\gamma \oplus -\gamma$ dans le cas pair.

En utilisant des méthodes usuelles, on montre facilement que pour e une projection (dans le cas pair) et u un unitaire (dans le cas impair) choisis dans $M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$, les opérateurs

$$\hat{e}(F_{\mu_+} \otimes \text{Id}_n) \hat{e} \quad \text{et} \quad (P_\mu \otimes \text{Id}_n) \hat{u} (P_\mu \otimes \text{Id}_n),$$

sont $(\tau \otimes \text{tr}_{2n})$ -Fredholm et que de plus

$$\begin{aligned} \langle [e] - [\pi_n(e)], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle &= \tau \otimes \text{tr}_{2n}\text{-Index} \left(\hat{e}(F_{\mu_+} \otimes \text{Id}_n) \hat{e} \right), \\ \langle [u], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle &= \tau \otimes \text{tr}_{2n}\text{-Index} \left((P_\mu \otimes \text{Id}_n) \hat{u} (P_\mu \otimes \text{Id}_n) \right). \end{aligned}$$

Dans le cas impair, on peut en fait se passer de la procédure de “doublement” du triplet spectral. En effet, en posant $P := \chi_{[0, \infty)}(\mathcal{D})$, pour tout unitaire $u \in M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$, l'opérateur $(P \otimes \text{Id}_n)u(P \otimes \text{Id}_n)$ est $(\tau \otimes \text{tr}_n)$ -Fredholm et on a aussi

$$\langle [u], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle = \tau \otimes \text{tr}_n\text{-Index} \left((P \otimes \text{Id}_n)u(P \otimes \text{Id}_n) \right).$$

Supposons maintenant que $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ soit finiment sommable, de parité $* = 0, 1$, de dimension spectrale $p \geq 1$ et que $[p] = * \bmod 2$. On a alors $[F_\mu, \hat{a}] \in \mathcal{L}^p(\mathcal{N}, \tau)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ (c'est-à-dire que le module de Fredholm semi-fini $(F_\mu, \mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ pour \mathcal{A} est p -sommable) et dans ce cas, le couplage indice numérique peut aussi se calculer comme le couplage en degré $[p]$ du caractère de Chern en cohomologie cyclique périodique avec son homologue en homologie :

$$\begin{aligned} \langle [e] - [\pi_n(e)], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle &= \text{Ch}_{F_\mu \otimes \text{Id}_n}^{[p]} \left(\text{Ch}_{[p]}(\hat{e}) \right), \quad \text{cas pair}, \\ \langle [u], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle &= -(2i\pi)^{-1/2} \text{Ch}_{F_\mu \otimes \text{Id}_n}^{[p]} \left(\text{Ch}_{[p]}(\hat{u}) \right), \quad \text{cas impair}, \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

avec, en posant $\tau'(T) := \frac{1}{2}\tau(F_\mu(F_\mu T + T F_\mu))$,

$$\text{Ch}_{F_\mu}^k(a_0, a_1, \dots, a_k) := \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}{k!} \tau'(\gamma a_0 [F_\mu, a_1] \dots [F_\mu, a_k]), & k \text{ pair}, \\ \sqrt{2i} \frac{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}{k!} \tau'(a_0 [F_\mu, a_1] \dots [F_\mu, a_k]), & k \text{ impair}. \end{cases}, \quad (7.1.4)$$

et si $e \in \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ est une projection, $\text{Ch}_0(e) = e$ et pour $k \geq 1$

$$\text{Ch}_{2k}(e) = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} (e - 1/2) \otimes e \otimes \dots \otimes e, \quad (7.1.5)$$

si $u \in \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ est un unitaire, pour $k \geq 0$

$$\text{Ch}_{2k+1}(u) = (-1)^k k! u^* \otimes u \otimes \dots \otimes u^* \otimes u.$$

Le bénéfice de l'égalité (7.1.3) est d'avoir une formule explicite pour l'application l'indice numérique (7.1.2). Par contre, son calcul reste délicat étant donné son caractère hautement non local. Dans le cas d'un triplet spectral unifié ordinaire (i.e. $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$) et

$\tau = \text{Tr}$), Connes et Moscovici [29] ont résolu ce problème en construisant un représentant local du caractère de Chern ; local dans le sens où il ne fait apparaître que des résidus de fonctions zeta de certains opérateurs. En adaptant les techniques d'Higson [49] au cadre semi-fini, une formule locale de l'indice a été obtenue par mes collaborateurs dans [21, 22] dans le cas semi-fini et unifié. Ce que nous démontrons ici c'est une formule analogue dans le cas semi-fini et non unifié. L'outil principal est la construction d'une version adaptée au cas sans unité du calcul pseudo-différentiel de Connes et Moscovici [29].

7.2 Un calcul pseudo-différentiel adapté

La première étape pour définir notre calcul pseudo-différentiel adapté au cas localement compact consiste à affiner la théorie de l'intégration donnée au paragraphe 6.2. Pour un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ semi-fini, sans unité et finiment sommable de dimension spectrale $p \geq 1$, nous considérons la famille des poids fidèles, normaux et semi-finis sur \mathcal{N} , donnés par

$$T \in \mathcal{N}_+ \mapsto \varphi_s(T) := \tau\left((1 + \mathcal{D}^2)^{-s/4} T (1 + \mathcal{D}^2)^{-s/4}\right) \in [0, +\infty], \quad s > p.$$

En définissant $L^2(\mathcal{N}, \varphi_s)$ comme étant l'espace GNS du poids φ_s , on considère la variante Fréchet de l'algèbre de Banach $B((1 + \mathcal{D}^2)^{-p/2})$ donnée dans la Proposition 6.2.1 :

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{D}, p) := \mathcal{N} \cap \left(\bigcap_{s > p} L^2(\mathcal{N}, \varphi_s) \cap L^2(\mathcal{N}, \varphi_s)^* \right).$$

On munira $\mathcal{B}_2(\mathcal{D}, p)$ de la topologie associée à la famille de semi-normes :

$$\mathcal{Q}_n(T) := \left(\|T\|^2 + \varphi_{p+1/n}(|T|^2) + \varphi_{p+1/n}(|T^*|^2) \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Finalement, on introduit l'espace $\mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p)$ des éléments intégrables, comme l'image sous la multiplication du produit tensoriel projectif de deux copies de $\mathcal{B}_2(\mathcal{D}, p)$:

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p) := m\left(\mathcal{B}_2(\mathcal{D}, p) \otimes_{\pi} \mathcal{B}_2(\mathcal{D}, p)\right) \subset \mathcal{N}.$$

On montre alors que cet espace possède de très bonnes propriétés, en particulier :

Proposition 7.2.1. [17, Theorem 1.10, Propositions 1.14, 1.18 & 1.19]

1. Munie de la topologie associée aux semi-normes :

$$\mathcal{P}_n(T) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{Q}_n(T_{1,i}) \mathcal{Q}_n(T_{2,i}) : T = \sum_{i=1}^{\infty} T_{1,i} T_{2,i}, T_{1,i}, T_{2,i} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{D}, p) \right\},$$

L'espace $\mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p)$ est une sous- $*$ -algèbre de Fréchet de \mathcal{N} , stable par calcul fonctionnel holomorphe.

2. Tout élément $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p)$ est de la forme $T = T_1 - T_2 + iT_3 - iT_4$ avec $0 \leq T_j$, $T_j^{1/2} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{D}, p)$. Cependant, cette décomposition ne coïncide pas forcément avec la décomposition de Jordan de T dans \mathcal{N} .

3. Supposons qu'il existe une sous-algèbre de von Neumann $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction du poids φ_n à \mathcal{M} soit une trace semi-finie, fidèle et normale. On a alors,

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p) \cap \mathcal{M} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{L}^1(\mathcal{M}, \tau_n) \cap \mathcal{M},$$

et de plus $\mathcal{P}_n(\cdot) = \|\cdot\| + 2\|\cdot\|_{\tau_n}$, où $\|\cdot\|_{\tau_n}$ est la norme de $\mathcal{L}^1(\mathcal{M}, \tau_n)$.

Voici la raison principale pour introduire l'espace $\mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p)$:

Proposition 7.2.2. [17, Proposition 2.17] Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, sans unité et finiment sommable de dimension spectrale $p \geq 1$. Alors, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p)$.

Nous allons maintenant voir que modulo une condition supplémentaire de régularité, la condition $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p)$ est aussi suffisante pour avoir un triplet spectral finiment sommable. Comme à l'accoutumé, la régularité d'un triplet spectral se mesure au moyen de la dérivation (partiellement définie) $\delta(T) := [|\mathcal{D}|, T]$. On introduit alors la version lisse de $\mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p)$:

$$\mathcal{B}_1^\infty(\mathcal{D}, p) := \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_1^k(\mathcal{D}, p),$$

avec

$$\mathcal{B}_1^k(\mathcal{D}, p) := \left\{ T \in \mathcal{N} : \forall l = 0, \dots, k, \delta^l(T) \in \mathcal{B}_1(\mathcal{D}, p) \right\}.$$

On montre aussi que $\mathcal{B}_1^\infty(\mathcal{D}, p)$ est une $*$ -algèbre de Fréchet, stable par calcul fonctionnel holomorphe dans \mathcal{N} .

On a alors une réciproque partielle à la Proposition 7.2.2 :

Proposition 7.2.3. [17, Proposition 2.16] Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, sans unité tel qu'il existe $p \geq 1$ avec $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_1^\infty(\mathcal{D}, p)$. Alors $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est finiment sommable, de dimension spectrale le plus petit p possible.

Les deux résultats précédents justifient l'introduction de la définition suivante :

Définition 7.2.4. Un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ est régulièrement sommable si il existe $p > 0$ tel que

$$\mathcal{A} \cup [|\mathcal{D}|, \mathcal{A}] \subset \mathcal{B}_1^\infty(\mathcal{D}, p).$$

Rappelons que pour un triplet spectral semi-fini avec élément unité, on définit les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $r \in \mathbb{R}$ comme :

$$\text{OP}^r := (1 + \mathcal{D}^2)^{r/2} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom } \delta^n \right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad \text{OP}^* := \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \text{OP}^r.$$

Il est évident que cette notion continue à avoir du sens dans le cas d'un triplet spectral sans unité mais, par contre, elle est de piètre utilité car ici $\bigcup_{r < 0} \text{OP}^r$ n'est a priori pas contenu dans les opérateurs τ -compacts. À la place, on définit une notion d'opérateurs pseudo-différentiels adaptée à notre situation :

Définition 7.2.5. L'espace $\text{OP}_0^* := \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \text{OP}_0^r$, des opérateurs pseudo-différentiels modérés est donné par :

$$\text{OP}_0^r := (1 + \mathcal{D}^2)^{r/2} \mathcal{B}_1^\infty(\mathcal{D}, p), \quad r \in \mathbb{R}.$$

La topologie naturelle sur OP_0^r est associée à la famille de semi-norme :

$$\mathcal{P}_{n,l}^r(T) := \mathcal{P}_{n,l} \left((1 + \mathcal{D}^2)^{-r/2} T \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2.1)$$

Pour ne pas alourdir les notations, nous ne faisons pas apparaître la dépendance de OP_0^r dans les choix de \mathcal{D} et $p \geq 1$. Les opérateurs pseudo-différentiels modérés généralisent leurs analogues du cas compact et possèdent des propriétés analogues. Notons cependant que les opérateurs “différentiels”, c'est-à-dire les polynômes en \mathcal{D} , ne sont pas des opérateurs pseudo-différentiels modérés.

Proposition 7.2.6. [17, Corollary 1.30 & Lemma 1.31]

1. OP_0^r est un espace de Fréchet, OP_0^0 une algèbre de Fréchet et on a une inclusion continue $\text{OP}_0^r \subset \text{OP}^r$.
2. Pour tous $r, s \in \mathbb{R}$, on a $(\text{OP}_0^r \text{OP}^s \cup \text{OP}^s \text{OP}_0^r) \subset \text{OP}_0^{r+s}$.
3. $\text{OP}^0 \subset \mathcal{N}$, $\bigcup_{r < 0} \text{OP}^r \subset \mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ et $\bigcup_{r < -p} \text{OP}_0^r \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{N}, \tau)$.

7.3 Une formule locale de l'indice

Pour formuler notre version du théorème local de l'indice, nous avons besoin d'introduire la notion de dimension spectrale isolée, une notion plus faible que la notion standard de spectre de dimension discret (c.f. [29]) :

Définition 7.3.1. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, sans unité et régulièrement sommable de dimension spectrale $p \geq 1$. Considérons alors les éléments $b \in \mathcal{N}$, de la forme

$$b = a_0 da_1^{(k_1)} \cdots da_m^{(k_m)} (1 + \mathcal{D}^2)^{-|k| - m/2}, \quad a_0, \dots, a_m \in \mathcal{A},$$

avec $k \in \mathbb{N}^m$, $|k| = k_1 + \cdots + k_m$, $da := [\mathcal{D}, a]$ et $da^{(k)}$ est défini par récurrence par $da^{(k)} = [\mathcal{D}^2, da^{(k-1)}]$. On dira que la dimension spectrale est isolée si pour tout $b \in \mathcal{N}$ de la forme précédente, la fonction zêta :

$$\zeta_b(z) := \tau \left(b(1 + \mathcal{D}^2)^{-z} \right), \quad \Re(z) > p,$$

admet un prolongement méromorphe sur un ouvert contenant un voisinage de $z = 0$ et holomorphe sur $\{|z| < \rho\} \setminus \{0\}$, pour un certain $\rho > 0$. Dans ce cas, on pose

$$\tau_j(b) := \text{res}_{z=0} z^j \zeta_b(z), \quad j \in \{-1\} \cup \mathbb{N}.$$

Nous allons maintenant introduire deux cocycles en cohomologie cyclique réduite (voir [66, Chapter 2]) pour $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$, le cocycle résiduel et le cocycle résolvant.

Définition 7.3.2. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, sans unité, régulièrement sommable de dimension spectrale isolée $p \geq 1$, de parité $*$ = 0 ou $*$ = 1, soit M le plus grand entier de même parité que le triplet dans l'intervalle $[0, p + 1]$ et soit aussi

$$\alpha(k)^{-1} := k_1! \dots k_m! (k_1 + 1)(k_1 + k_2 + 2) \dots (|k| + m), \quad k \in \mathbb{N}^m,$$

$h = |k| + (m - *)/2$. Définissons finalement $\sigma_{h,j}$ par les relations

$$\prod_{j=0}^{n-1} (z + j + \frac{1}{2}) = \sum_{j=0}^n z^j \sigma_{n,j}, \quad * = 1, \quad \prod_{j=0}^{n-1} (z + j) = \sum_{j=1}^n z^j \sigma_{n,j}, \quad * = 0.$$

On définit alors le cocycle résiduel comme étant donné par la collection finie des fonctionnelles multilinéaires et continues $\phi = (\phi_m)_{m=*, *+2, \dots, M}$, $\phi_m : \mathcal{A}^{\otimes m+1} \rightarrow \mathbb{C}$, où

$$\phi_0(a_0) = \tau_{-1}(a_0), \quad a_0 \in \mathcal{A},$$

et pour $m = 1, \dots, M$, $a_0, \dots, a_m \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \phi_m(a_0, \dots, a_m) = \\ (\sqrt{2i\pi})^* \sum_{|k|=0}^{M-m} (-1)^{|k|} \alpha(k) \sum_{j=1-*}^h \sigma_{h,j} \tau_{j-1+*} \left(\gamma a_0 da_1^{(k_1)} \dots da_m^{(k_m)} (1 + \mathcal{D}^2)^{-|k|-m/2} \right). \end{aligned}$$

Pour définir le cocycle résolvant, nous avons besoin d'introduire sur OP_0^* , les formes multilinéaires suivantes :

Définition 7.3.3. Soient $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{C}$ et $A_0, \dots, A_m \in \text{OP}^{k_i}$ tel qu'il existe i_0 avec $A_{i_0} \in \text{OP}_0^{k_{i_0}}$. Pour $|k| - 2m < 2\Re(r)$, on définit

$$\langle A_0, \dots, A_m \rangle_{m,r,s} := \frac{1}{2\pi i} \tau \left(\gamma \int_{i\mathbb{R}} \lambda^{-p/2-r} A_0 R_s(\lambda) \dots A_m R_s(\lambda) d\lambda \right), \quad (7.3.1)$$

où γ est la \mathbb{Z}_2 -gradation dans le cas pair et l'identité dans le cas impair et

$$R_s(\lambda) := \frac{1}{\lambda - (1 + s^2 + \mathcal{D}^2)}.$$

On va maintenant définir les composantes du cocycle résolvant en termes des formes multilinéaires $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{m,r,s}$:

Définition 7.3.4. Pour $m = *, * + 2, \dots, M$ (M est le plus grand entier de même parité que le triplet dans l'intervalle $[0, p + 1]$), on introduit les constantes η_m par

$$\eta_m = (-\sqrt{2i})^{\bullet} 2^{m+1} \frac{\Gamma(m/2 + 1)}{\Gamma(m + 1)}.$$

Pour $\Re(r) > (1 - m)/2$, la m -ième composante du cocycle résolvant $\phi_m^r : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\otimes m} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par :

$$\phi_m^r(a_0, \dots, a_m) := \eta_m \int_0^\infty s^m \langle a_0, da_1, \dots, da_m \rangle_{m,r,s} ds.$$

Remarque 7.3.5. C'est grâce aux propriétés des opérateurs pseudo-différentiels modérés, que le cocycle résolvant est bien défini. Plus précisément, on montre que le cocycle résolvant est continu et prend ses valeurs dans l'anneau \mathcal{O}_m des fonctions analytiques sur le demi-plan $H_m := \{\Re(z) > (1 - m)/2\}$ dans le paramètre r .

En suivant les méthodes de [49] et leurs généralisations au cas semi-fini compact [21,22], on montre que le cocycle résolvant est bien évidemment un cocycle dans le (b, B) -complexe réduit en cohomologie cyclique. Plus précisément, on a :

Proposition 7.3.6. [17, Propositions 3.17, 3.19 et 3.20] Soit $m = *, * + 2, \dots, M$.

1. L'application

$$\phi_m^\bullet := \left[(a_0, \dots, a_m) \in \mathcal{A}^{\otimes(m+1)} \mapsto \left[r \in H_m \rightarrow \phi_m^r(a_0, \dots, a_m) \right] \right],$$

envoie continument $\mathcal{A}^{\otimes(m+1)}$ sur \mathcal{O}_m .

2. Il existe $\delta > 0$ tel que la cochaîne $(\phi_m^r)_{m=*}^M$ soit un (b, B) -cocycle réduit de parité $*$ pour \mathcal{A} , modulo une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Re(r) > (1 - p)/2 - \delta$.
3. Si de plus la dimension spectrale est isolée, alors il existe un voisinage ouvert U du point critique $(1 - p)/2$, tel que pour tous $m = *, * + 2, \dots, M$ et a_0, \dots, a_m , l'application $[r \mapsto \phi_m^r(a_0, \dots, a_m)] \in \mathcal{O}_m$, possède un prolongement holomorphe sur $U \setminus \{(1 - p)/2\}$ et méromorphe sur U . De plus, le cocycle résiduel est un (b, B) -cocycle réduit et on a

$$\operatorname{res}_{r=(1-p)/2} \phi_m^r(a_0, \dots, a_m) = \phi_m(a_0, \dots, a_m).$$

Finalement, on montre que les cocycles résolvant et résiduel sont dans la même classe de cohomologie que celle du caractère de Chern en degré M :

Proposition 7.3.7. [17, Theorem 3.29]

1. À un cobord près, le cocycle résolvant est proportionnel au caractère de Chern en degré M :

$$\left[(\phi_m^r)_{m=*}^M \right] = \left[(r - (1 - p)/2)^{-1} \operatorname{Ch}_{F_\mu}^M \right],$$

dans le (b, B) -bi-complexe à coefficients dans \mathcal{O}_0 .

2. Si de plus la dimension spectrale est isolée, alors à un cobord près, le cocycle résiduel coïncide avec caractère de Chern en degré M :

$$\left[(\phi_m)_{m=*}^M \right] = \left[\operatorname{Ch}_{F_\mu}^M \right],$$

De ce résultat découle immédiatement une version du théorème local de l'indice pour les espaces noncommutatifs semi-finis et localement compacts :

Théorème 7.3.8. [17, Theorem 3.33] Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, sans unité, régulièrement sommable, de dimension spectrale $p \geq 1$, de parité $*$ = 0 ou $*$ = 1 et avec \mathcal{A} séparable.

1. Pour tout unitaire $u \in M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$ si $*$ = 1 ou tout projecteur $e \in M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$ si $*$ = 0, on a

$$\langle [u], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2\pi i}} \operatorname{res}_{r=(1-p)/2} \sum_{m=1, \text{impair}}^M \phi_m^r(\operatorname{Ch}^m(u)),$$

$$\langle [e] - [\pi_n(e)], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle = \operatorname{res}_{r=(1-p)/2} \sum_{m=0, \text{pair}}^M \phi_m^r(\operatorname{Ch}^m(e) - \operatorname{Ch}^m(\pi_n(e))).$$

2. Si de plus la dimension spectrale est isolée, on a

$$\langle [u], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2\pi i}} \sum_{m=1, \text{impair}}^M \phi_m(\operatorname{Ch}^m(u)),$$

$$\langle [e] - [\pi_n(e)], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle = \sum_{m=0, \text{pair}}^M \phi_m(\operatorname{Ch}^m(e) - \operatorname{Ch}^m(\pi_n(e))).$$

Remarque 7.3.9. La partie algébrique de la preuve du théorème précédent est tout à fait similaire à son analogue du cas semi-fini et compact donné par Carey, Philipps, Rennie et Sukochev dans [22, 23]. La nouveauté de notre approche se trouve dans la partie analytique de la preuve ; c'est l'introduction de notre calcul pseudo-différentiel adapté au cas localement compact qui nous a permis de justifier analytiquement les manipulations algébriques de l'approche donnée dans [22, 23].

7.3.1 Une formule du type McKean-Singer

Dans le cas pair, on peut relier notre formule locale de l'indice (Théorème 7.3.8) à une formule du type McKean-Singer.

Considérons e un projecteur dans $M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$ et posons

$$\mathcal{D}_e := e(\mathcal{D} \otimes \operatorname{Id}_n)e + (1 - e)(\mathcal{D} \otimes \operatorname{Id}_n)(1 - e).$$

Il est facile de construire une homotopie entre $\mathcal{D} \otimes \operatorname{Id}_n$ et \mathcal{D}_e , de telle sorte que nous obtenons une égalité en KK -théorie :

$$[(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] = [(M_n(\mathcal{A}), \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{D}_e)] \in KK^0(A, C),$$

qui implique alors l'égalité entre les applications indices associées :

$$\langle [e] - [\pi_n(e)], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle = \langle [e] - [\pi_n(e)], [(M_n(\mathcal{A}), \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{D}_e)] \rangle.$$

Nous aimerions pouvoir utiliser la formule locale de l'indice pour le triplet spectral $(M_n(\mathcal{A}), \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{D}_e)$. Cependant, il n'y a aucune raison de croire que la propriété de sommabilité régulière soit préservée par l'homotopie de $\mathcal{D} \otimes \operatorname{Id}_n$ à \mathcal{D}_e . Par contre, en définissant \mathcal{A}_e comme étant l'algèbre polynomiale en $e - \pi_n(e) \in M_n(\mathcal{A})$, étant donné que $[\mathcal{D}_e, \mathcal{A}_e] = [|\mathcal{D}_e|, \mathcal{A}_e] = 0$, on voit facilement que $(\mathcal{A}_e, \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{D}_e)$ est un triplet spectral régulièrement sommable de même dimension spectrale et de même parité que $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ et que de plus

$$\langle [e] - [\pi_n(e)], [(M_n(\mathcal{A}), \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{D}_e)] \rangle = \langle [e] - [\pi_n(e)], [(\mathcal{A}_e, \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n, \mathcal{D}_e)] \rangle.$$

Comme $[\mathcal{D}_e, e] = 0$, et en posant $\phi_{m,e}^r$ le cocycle résolvant construit avec \mathcal{D}_e , on voit que $\phi_{m,e}^r(\text{Ch}_m(e)) = 0$ pour tout $m \geq 2$. En calculant $\phi_{0,e}^r(\text{Ch}_0(e))$, le seul terme non nul, on obtient alors une formule du type McKean-Singer :

Proposition 7.3.10. *[17, Theorem 3.35] Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, pair, sans unité, régulièrement sommable, de dimension spectrale $p \geq 1$ et avec \mathcal{A} séparable. Alors, pour tout projecteur $e \in M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$, on a*

$$\langle [e] - [\pi_n(e)], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle = \text{res}_{r=(1-p)/2} \frac{1}{r - (1-p)/2} \tau \otimes \text{tr}_n \left(\gamma(e - \pi_n(e)) (1 + \mathcal{D}_e^2)^{-(r-(1-p)/2)} \right).$$

7.3.2 Une formule de flot spectral

Dans le cas impair, on peut relier notre formule locale de l'indice (Théorème 7.3.8) à une formule de flot spectral.

Rappelons tout d'abord comment est défini le flot spectral dans le cas semi-fini. Pour cela, posons $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}/\mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$ la projection sur l'algèbre de Calkin.

Définition 7.3.11. *Soit $[t \in [0, 1] \mapsto F_t]$ une fonction à valeurs dans les opérateurs τ -Fredholm auto-adjoints de \mathcal{N} et continue en norme. Le flot spectral $sf_\tau(\{F_t\})$ est défini à partir des observations suivantes [73] :*

1. *La fonction à valeurs dans les projecteurs $[t \mapsto P_t := \frac{1}{2}(\text{sign}(F_t) + 1)]$ est typiquement discontinue.*
2. *Par contre, la fonction $[t \mapsto \pi(P_t)]$ est continue en norme dans l'algèbre de Calkin.*
3. *Si P et Q sont des projections dans \mathcal{N} et si $\|\pi(P) - \pi(Q)\| < 1$ alors $PQ : Q\mathcal{H} \rightarrow P\mathcal{H}$ est un opérateur τ -Fredholm et donc $\tau\text{-Index}(PQ) \in \mathbb{R}$ est bien défini.*
4. *En partitionnant l'intervalle $[0, 1]$ de telle sorte que $\|\pi(P_{t_{i-1}}) - \pi(P_{t_i})\| < 1$, alors le nombre réel*

$$sf_\tau(\{F_t\}) := \sum_{i=1}^n \tau\text{-Index}(P_{t_{i-1}} P_{t_i}) \in \mathbb{R},$$

est invariant par homotopie et coïncide avec le flot spectral ordinaire dans le cas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

5. *Si $[t \mapsto \mathcal{D}_t]$ est une fonction à valeurs dans les opérateurs de τ -Fredholm non bornés, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$, $F_{\mathcal{D}_t} := \mathcal{D}_t(1 + \mathcal{D}_t^2)^{-1/2}$ est τ -Fredholm et si $[t \mapsto F_t]$ est continu en norme, on définit*

$$sf_\tau(\{\mathcal{D}_t\}) := sf_\tau(\{F_{\mathcal{D}_t}\}) \in \mathbb{R}.$$

Soit maintenant \mathcal{D} un opérateur affilié à \mathcal{N} , auto adjoint et soit $P := \chi_{[0,\infty)}(\mathcal{D})$. Considérons $u \in \mathcal{N}$ un unitaire tel que $[t \mapsto \mathcal{D}_t := \mathcal{D} + tu[\mathcal{D}, u^*]]$ soit à valeurs dans les opérateurs de τ -Fredholm non bornés, tel que la fonction $[t \mapsto F_t := F_{\mathcal{D}+tu[\mathcal{D}, u^*]}]$ soit continue en norme et tel que $F_1 - F_0$ soit compact. Dans ce cas particulier où les points extrémaux sont unitairement équivalents, on note le flot spectral de la manière suivante :

$$sf_\tau(\mathcal{D}, u\mathcal{D}u^*) := sf_\tau(\{\mathcal{D}_t\}) := sf_\tau(\{F_t\}).$$

Par [19] et [74, Appendix B], on a alors

$$sf_\tau(\mathcal{D}, u\mathcal{D}u^*) = \tau\text{-Index}(PuP).$$

En appliquant cela au cas d'un triplet spectral sans unité, on en déduit facilement le résultat suivant :

Proposition 7.3.12. [18, Theorem 4.2] *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, impair, sans unité et soit $u \in M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$ un unitaire tel que $[\mathcal{D} \otimes \text{Id}_n, u](1 + \mathcal{D}^2 \otimes \text{Id}_n)^{-1/2} \in \mathcal{K}(\mathcal{N}, \tau)$. En posant $P = \chi_{[0, \infty)}(\mathcal{D})$, on a*

$$sf_{\tau \otimes \text{tr}_{2n}}(\mathcal{D}_\mu \otimes \text{Id}_n, \hat{u}(\mathcal{D}_\mu \otimes \text{Id}_n)\hat{u}^*) = \text{Index}_{\tau \otimes \text{tr}_n}((P \otimes \text{Id}_n)u(P \otimes \text{Id}_n)).$$

Si maintenant le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ satisfait aux hypothèses du Théorème 7.3.8, on en déduit aussi :

$$sf_{\tau \otimes \text{tr}_{2n}}(\mathcal{D}_\mu \otimes \text{Id}_n, \hat{u}(\mathcal{D}_\mu \otimes \text{Id}_n)\hat{u}^*) = \langle [u], [(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})] \rangle.$$

En suivant les arguments de [21, section 5.3] dans le sens opposé, notre formule locale de l'indice permet de relier le flot spectral à une formule intégrale :

Proposition 7.3.13. [18, Theorem 4.8] *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ un triplet spectral semi-fini, impair, sans unité, régulièrement sommable, de dimension spectrale $p \geq 1$ et avec \mathcal{A} séparable. Alors, pour tout unitaire $u \in M_n(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$, on a*

$$\begin{aligned} \text{Index}_{\tau \otimes \text{tr}_n}((P \otimes \text{Id}_n)u(P \otimes \text{Id}_n)) = \\ \text{Res}_{z=0} \int_0^1 \tau \otimes \text{tr}_n \left(u[\mathcal{D} \otimes \text{Id}_n, u^*] \left(1 + (\mathcal{D} \otimes \text{Id}_n + tu[\mathcal{D} \otimes \text{Id}_n, u^*])^2 \right)^{-p/2-z} \right) dt. \end{aligned}$$

7.4 Applications aux variétés à géométrie bornée

7.4.1 Un théorème d'Atiyah-Singer

Notre premier exemple d'application du Théorème 7.3.8 est commutatif, sans unité et l'algèbre de von Neumann \mathcal{N} est $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

On considère ici :

- (M, g) une variété Riemannienne non-compacte à géométrie bornée [85] ;
- $S \rightarrow M$ un fibré Hermitien sur M à géométrie bornée [85] ;
- \mathcal{D}_S un opérateur de type Dirac sur S dans le sens de [46, 64].

Notre référence concernant les propriétés des opérateurs différentiels sur les variétés à géométrie bornée est [85, Appendix 1]. Rappelons qu'un opérateur différentiel sur une variété à géométrie bornée est dit à coefficients uniformément C^∞ -bornés, lorsque pour tout atlas formé de cartes de coordonnées canoniques, les dérivées à tous les ordres de ses coefficients sont bornées sur le domaine de la carte et que cette borne est uniforme sur l'atlas. En combinant les résultats de Kordyukov [57] et Greiner [45], on déduit les propriétés suivantes du noyau de la chaleur :

Proposition 7.4.1. [17, Proposition 4.2] Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n et à géométrie bornée. Soit aussi \mathcal{D}_S un opérateur de type Dirac agissant sur les sections d'un fibré hermitien S à géométrie bornée et soit finalement P un opérateur différentiel sur S d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}$, à coefficients uniformément C^∞ -bornés. Alors, le noyau $K_{t,P}^S(x, y) \in \text{Hom}(S_x, S_y)$ de l'opérateur $P e^{-t\mathcal{D}_S^2}$, satisfait à :

1. La borne supérieure Gaussienne globale :

$$\left| K_{t,P}^S(x, y) \right|_\infty \leq C t^{-(n+\alpha)/2} \exp\left(-\frac{d_g^2(x, y)}{4(1+c)t}\right), \quad t > 0,$$

où $|\cdot|_\infty$ est la norme d'opérateur sur $\text{Hom}(S_x, S_y)$ et d_g est la distance géodésique.

2. L'asymptotique globale : pour tout $f \in L^1(M)$

$$\int_M f(x) \text{tr}\left(K_{t,P}^S(x, x)\right) d\mu_g(x) \sim_{t \rightarrow 0^+} t^{-[\alpha/2]-n/2} \sum_{i \geq 0} t^i \int_M f(x) b_{P,i}(x) d\mu_g(x).$$

où les fonctions $b_{P,i}(x)$ sont déterminées par un nombre fini de jets du symbole principal de $P(\partial_t + \mathcal{D}_S^2)^{-1}$.

Soit Δ_g le Laplacien scalaire sur M . Pour $k \in [1, \infty]$ et $l \in [0, \infty)$, posons $W^{k,l}(M)$ l'espace de Sobolev des fonctions sur M telles que $\|f\|_{k,l} := \|\Delta_g^{l/2} f\|_k < \infty$. Posons aussi $W^{k,\infty}(M) := \bigcap_{l \geq 0} W^{k,l}(M)$ et, pour $s > n$, k_s la fonction continue donnée par la trace sur la fibre S_x du noyau de l'opérateur $(1 + \mathcal{D}_S^2)^{-s/2}$ sur sa diagonale :

$$k_s(x) = \text{tr}\left([(1 + \mathcal{D}_S^2)^{-s/2}]_{x,x}\right).$$

Dans les conditions précédentes, on montre :

Proposition 7.4.2. [17, Corollary 4.8 & Proposition 4.9]

1. On a l'identification :

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{D}_S, n) \cap L^\infty(M) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} L^1(M, k_{s+1/m} d\mu_g) \cap L^\infty(M).$$

2. Relativement à $(\mathcal{B}(L^2(M, S)), \text{Tr})$, $(W^{1,\infty}(M), L^2(M, S), \mathcal{D}_S)$ est un triplet spectral régulièrement sommable de dimension spectrale isolée n .

Dans le cas d'une variété à spin et en suivant les méthodes développées par Ponge [75], on déduit du Théorème 7.3.8, la version suivante du Théorème d'Atiyah-Singer :

Théorème 7.4.3. [17, Corollaries 4.11 & 4.13] Soit (M, g, S) une variété Riemannienne à spin et à géométrie bornée de dimension n et soit \mathcal{D}_S l'opérateur de Dirac sur le fibré des spineurs.

1. Si n est pair, alors pour tout projecteur $e \in M_N(W^{1,\infty}(M) \oplus \mathbb{C})$ et avec F_μ la phase de $\mathcal{D}_{S,\mu} \otimes \text{Id}_N$, on a

$$\text{Ind}(\hat{e} F_{\mu,+} \hat{e}) = (2\pi i)^{-n/2} \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int_M \text{Ch}_{2m}(e) \wedge \hat{A}(R)^{(n-2m)}.$$

2. Si n est impair, alors pour tout unitaire $u \in M_N(W^{1,\infty}(M) \oplus \mathbb{C})$, avec $P_\mu = \frac{1}{2}(1 + F_\mu)$ et $P = \chi_{[0,\infty)}(\mathcal{D}_S) \otimes \text{Id}_N$, on a

$$\begin{aligned} \text{Ind}(PuP) &= \text{Ind}(P_\mu \hat{u} P_\mu) \\ &= \frac{-1}{(2\pi i)^{\frac{n+1}{2}}} \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^m}{(2m+1)! m!} \int_M \text{Ch}_{2m+1}(u) \wedge \hat{A}(R)^{(n-2m-1)}. \end{aligned}$$

7.4.2 Le cas des revêtements

Nous allons maintenant donner une version du théorème de l'indice- L^2 d'Atiyah dans le contexte des variétés Riemanniennes à géométrie bornée.

On considère maintenant :

- (\tilde{M}, \tilde{g}) une variété Riemannienne de dimension n et à géométrie bornée ;
- G un groupe dénombrable agissant librement et proprement sur \tilde{M} par isométries ;
- $M := G \backslash \tilde{M}$ la variété quotient, possiblement non compacte ;
- \mathcal{D}_S un opérateur de type Dirac agissant sur un fibré $S \rightarrow M$ à géométrie bornée.

Remarque 7.4.4. La différence majeure avec le cadre usuel c'est que nous ne supposons pas ici que la variété \tilde{M} soit G -compacte.

Soit \tilde{S} le relèvement du fibré S sur \tilde{M} . En supposant que l'action de G sur \tilde{M} se relève aussi en une action de G sur \tilde{S} , l'opérateur \mathcal{D}_S sur S se relèvera en un opérateur G -équivariant $\tilde{\mathcal{D}}_S$ sur \tilde{S} . On remarque que l'algèbre commutative $W^{1,\infty}(M)$ agit par opérateurs bornés sur $L^2(\tilde{M}, \tilde{S})$ via l'injection

$$W^{1,\infty}(M) \rightarrow C_b(\tilde{M}), \quad f \mapsto f \circ q,$$

avec $q : \tilde{M} \rightarrow M$ la projection canonique.

Soit $\mathcal{N}_G = G'$, le commutant de l'action de G sur $L^2(\tilde{M}, \tilde{S})$. Étant donné que l'action de G sur \tilde{M} est libre et propre, on a une identification $L^2(\tilde{M}, \tilde{S}) \cong L^2(M, S) \otimes \ell^2(G)$ qui induit une identification d'algèbres de von Neumann $\mathcal{N}_G \cong \mathcal{B}(L^2(M, S)) \otimes W^*(G)$, où $W^*(G)$ est l'algèbre de von Neumann du groupe G . \mathcal{N}_G est canoniquement munie d'une trace semi-finie, fidèle et normale τ_G . Elle est donnée sur les tenseurs élémentaires $T \otimes U \in \mathcal{B}(L^2(M, S)) \otimes W^*(G)$ par

$$\tau_G(T \otimes U) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(T) \tau_e(U),$$

où $\text{Tr}_{\mathcal{H}}$ est la trace d'opérateurs sur $L^2(M, S)$ est τ_e la trace usuelle sur $W^*(G)$ donnée par l'évaluation au neutre.

Nous sommes en présence de deux triplets spectraux pour l'algèbre commutative $W^{1,\infty}(M)$: $(W^{1,\infty}(M), L^2(M, S), \mathcal{D}_S)$, relativement au facteur de type I_∞ avec la trace usuelle et $(W^{1,\infty}(M), L^2(\tilde{M}, \tilde{S}), \tilde{\mathcal{D}}_S)$, relativement à l'algèbre de von Neumann semi-finie \mathcal{N}_G et de trace τ_G . On va montrer que le deuxième triplet spectral est aussi régulièrement sommable de dimension spectrale n et que les couplages de ces triplets spectraux avec $K_*(W^{1,\infty}(M))$, couplages donnés par les applications indice numérique de chaque triplet, coïncident. Pour cela, nous avons besoin du résultat suivant :

Proposition 7.4.5. [17, Lemma 4.14 & Proposition 4.16] Soit (\tilde{M}, \tilde{g}) une variété Riemannienne à géométrie bornée munie d'une action libre et propre d'un groupe dénombrable G . Soit aussi P un opérateur différentiel d'ordre α et de coefficients uniformément C^∞ -bornés agissant sur les sections d'un fibré S à géométrie bornée sur M . Supposons aussi que l'action de G sur \tilde{M} se relève en une action sur $\tilde{S} := q^*S$ et soit alors \tilde{P} l'opérateur G -equivariant sur \tilde{S} obtenu par relèvement de P . Supposons finalement que

$$\kappa := \inf \left\{ d_{\tilde{g}}(\tilde{x}, h \cdot \tilde{x}) : \tilde{x} \in \tilde{M}, h \in G \setminus \{e\} \right\} > 0.$$

1. Il existe $c, C > 0$ telles que pour tout $(\tilde{x}, x) \in \tilde{M} \times M$, avec $x = q(\tilde{x})$, on a

$$\left| [\tilde{P}e^{-t\tilde{\mathcal{D}}_S^2}](\tilde{x}, \tilde{x}) - [Pe^{-t\mathcal{D}_S^2}](x, x) \right|_\infty \leq C t^{-(n+\alpha)/2} e^{-c/t}.$$

2. Si de plus $f \in W^{1,\infty}(M)$, alors pour $\Re(z) > n$, on a l'égalité

$$\tau_G(\tilde{\gamma}\tilde{c}(f)\tilde{P}(1 + \tilde{\mathcal{D}}_S^2)^{-z/2}) = \text{Tr}(\gamma c(f)P(1 + \mathcal{D}_S^2)^{-z/2}),$$

modulo une fonction entière dans la variable complexe z .

Remarque 7.4.6. La condition $\kappa > 0$ est bien évidemment satisfaite dans le cas compact.

On déduit ensuite le résultat suivant :

Théorème 7.4.7. [17, Corollary 4.17 & Theorem 4.18]

1. Relativement à (\mathcal{N}_G, τ_G) , le triplet spectral $(W^{1,\infty}(M), L^2(\tilde{M}, \tilde{S}), \tilde{\mathcal{D}}_S)$ est régulièrement sommable de dimension spectrale isolée n .
2. L'application indice numérique sur $K_*(W^{1,\infty}(M))$ associée au triplet spectral ordinaire $(W^{1,\infty}(M), L^2(M, S), \mathcal{D}_S)$ coïncide avec celle associée au triplet spectral semi-fini $(W^{1,\infty}(M), L^2(\tilde{M}, \tilde{S}), \tilde{\mathcal{D}}_S)$ et cette dernière est donc à valeurs entières.

7.5 Des exemples noncommutatifs

Nous allons décrire maintenant deux exemples de théorèmes de l'indice obtenus à partir de notre formule locale de l'indice pour des algèbres noncommutatives et sans unité. Le premier est de type I_∞ et est associé au plan de Moyal, pour lequel un triplet spectral a été construit dans [38]. Le second est semi-fini et est associé à toute action continue de \mathbb{R} sur une C^* -algèbre munie d'une trace invariante.

7.5.1 Plan de Moyal

Rappelons que le produit de Moyal d'une paire de fonctions dans l'espace de Schwartz sur \mathbb{R}^2 est donné par la formule :

$$f \star_\theta g(x) := (\pi\theta)^{-2} \iint e^{\frac{2i}{\theta}\omega_0(x-y, x-z)} f(y)g(z) dy dz, \quad (7.5.1)$$

où $\theta \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre (classifiant les représentations unitaires et irréductibles du groupe de Heisenberg) et ω_0 est la forme symplectique ordinaire de $\mathbb{R}^2 \simeq T^*\mathbb{R}$. Rappelons aussi que le produit de Moyal est relié à la quantification de Weyl via la relation

$$\text{Op}_W^\theta(f)\text{Op}_W^\theta(g) = \text{Op}_W^\theta(f \star_\theta g).$$

Étant donné que Op_W^θ est une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathcal{L}^2(L^2(\mathbb{R}))$ (l'espace de Hilbert des opérateurs Hilbert-Schmidt), $L^2(\mathbb{R}^2)$ forme une algèbre pour le produit \star_θ . Rappelons finalement que la sous- C^* -algèbre de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$ engendrée par les opérateurs de multiplication à gauche au sens du produit de Moyal par des éléments de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est isomorphe à la C^* -algèbre des opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{R})$.

Posons

$$\mathcal{A}_\theta := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : \forall n \in \mathbb{N}^2, \quad \exists f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \partial_1^{n_1} \partial_2^{n_2} f = f_1 \star_\theta f_2 \right\}.$$

Munie de la topologie associée aux semi-normes $\|f\|_{1,\alpha} := \|\text{Op}_W^\theta(\partial^\alpha f)\|_1$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, \mathcal{A}_θ devient une algèbre de Fréchet pour le produit de Moyal, naturellement représentée par des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ et dont la C^* -complétion, A_θ , est isomorphe aux compacts. En considérant finalement \mathcal{D} , l'opérateur de Dirac usuel sur \mathbb{R}^2 , on montre :

Proposition 7.5.1. [17, Corollary 5.6 & Proposition 5.8] Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$.

1. On a l'identification :

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{D}, 2) \cap A_\theta \simeq L^2(\mathbb{R}^2) \star_\theta L^2(\mathbb{R}^2) \simeq \mathcal{L}^1(L^2(\mathbb{R})).$$

2. Relativement à $(\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2)), \text{Tr})$, $(\mathcal{A}_\theta, L^2(\mathbb{R}^2), \mathcal{D})$ est un triplet spectral sans unité, régulièrement sommable et de dimension spectrale isolée égale à 2.

Remarque 7.5.2. Le résultat précédent affine le Théorème principal de [38].

Soit $H := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ le Hamiltonien (classique) de l'oscillateur harmonique et soit $a := 2^{-1/2}(x_1 + ix_2)$, $\bar{a} := 2^{-1/2}(x_1 - ix_2)$. On pose

$$f_{m,n} := \frac{1}{\sqrt{\theta^{n+m} n! m!}} \bar{a}^{\star_\theta m} \star_\theta f_{0,0} \star_\theta a^{\star_\theta n} \quad \text{où} \quad f_{0,0} := 2e^{-\frac{2}{\theta}H}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

La famille $\{f_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\theta$ forme une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et satisfait à la relation d'orthogonalité $f_{m,n} \star_\theta f_{k,l} = \delta_{n,k} f_{m,l}$. En particulier, pour tout ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$, $P_J := \sum_{n \in J} f_{n,n} \in \mathcal{A}_\theta$ est un projecteur. Dans ce cas particulier de projecteurs appartenant directement à l'algèbre (et non pas à son unitalisation), en posant $F = \mathcal{D}(1 + \mathcal{D}^2)^{-1/2}$, on montre facilement que $L^\theta(P_J)F_\pm L^\theta(P_J)$ est un opérateur de Fredholm sur $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$. En particulier, on n'a pas besoin ici de passer au triplet spectral double pour définir un indice numérique. En utilisant le Théorème 7.3.8, on montre :

Proposition 7.5.3. [17, Proposition 5.10] Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. Pour tout sous-ensemble fini J de \mathbb{N} , on a

$$\text{Index}(p_J F_+ p_J) = \left\langle [p_J], [(\mathcal{A}_\theta, L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2), \mathcal{D})] \right\rangle = \text{Card}(J).$$

En particulier, l'application indice numérique fournit un isomorphisme explicite entre $K_0(A_\theta) = K_0(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R})))$ et \mathbb{Z} .

7.5.2 Le Théorème de l'indice de Phillips-Raeburn

Nous allons construire maintenant un triplet spectral semi-fini, sans unité et régulièrement sommable associé à une action continue de \mathbb{R} sur une C^* -algèbre munie d'une trace invariante.

On considère ici :

- (A, τ) une C^* -algèbre sans unité, munie d'une trace densément définie, fidèle et semi-continue inférieurement en norme ;
- $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(A)$ une action fortement continue sous laquelle la trace τ est invariante ;
- $A_\tau := \{a \in \mathcal{A} : \tau(|a|) < \infty\}$, l'idéal de A des éléments à trace, normé par $\|a\|_\tau := \|a\| + \tau(|a|)$;
- Les dérivations (partiellement définies) δ sur A et δ_τ sur A_τ déterminées par α ;
- A_τ^∞ l'espace des vecteurs lisses pour l'action α de \mathbb{R} sur A_τ ;
- H_τ l'espace GNS de (A, τ) .

Le produit croisé $\mathbb{R} \rtimes_\alpha A$ et la C^* -algèbre A agissent naturellement sur $L^2(\mathbb{R}, H_\tau) \simeq L^2(\mathbb{R}) \otimes H_\tau$ via les représentations $\tilde{\pi}$ et π :

$$\tilde{\pi}(f)\xi(s) = \int_{\mathbb{R}} \alpha_{-s}(f(t)) \xi(s-t) dt, \quad \pi(a)\xi(s) = \alpha_{-s}(a)\xi(s).$$

Considérons les algèbres de von Neumann :

$$\mathcal{N} := (\tilde{\pi}(\mathbb{R} \rtimes_\alpha A))'' \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}, H_\tau)), \quad \mathcal{M} := A'' \subset \mathcal{B}(H_\tau).$$

La trace τ sur A possède une extension normale $\bar{\tau}$ sur \mathcal{M} et \mathcal{N} est canoniquement munie d'une trace normale fidèle et semi-finie $\hat{\tau}$, satisfaisant à la relation

$$\hat{\tau}(\tilde{\pi}(x)^* \tilde{\pi}(y)) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\tau}(x(t)^* y(t)) dt,$$

quels que soient $x, y \in L^2(\mathbb{R}, H_\tau)$ avec $\tilde{\pi}(x), \tilde{\pi}(y) \in \mathcal{N}$. Soit finalement $D = \frac{-1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \otimes \text{Id}$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes H_\tau \simeq L^2(\mathbb{R}, H_\tau)$, de telle sorte que D est un opérateur non borné, auto-adjoint et affilié à \mathcal{N} .

En appliquant le Théorème 7.3.8 au triplet spectral $(A_\tau^\infty, L^2(\mathbb{R}, H_\tau), D)$, on retrouve le Théorème de l'indice de Phillips et Raeburn [74] :

Proposition 7.5.4. [18, Proposition 3.10 & Theorem 3.13]

1. On a l'identification $\mathcal{M} \cap \mathcal{B}_1(D, 1) \simeq A_\tau$.
2. Relativement à $(\mathcal{N}, \hat{\tau})$, $(A_\tau^\infty, L^2(\mathbb{R}, H_\tau), D)$ est un triplet spectral semi-fini, sans unité, régulièrement sommable et de dimension spectrale isolée égale à 1.
3. En posant $P = \chi_{[0, \infty)}(D)$, on a pour tout unitaire $u \in M_n(A_\tau^\infty \oplus \mathbb{C})$:

$$\hat{\tau} \otimes \text{tr}_n\text{-Index}\left((P \otimes \text{Id}_n)u(P \otimes \text{Id}_n)\right) = -\frac{1}{2\pi i} \tau \otimes \text{tr}_n(u^* \partial_\tau(u)).$$

Remarque 7.5.5. Le cadre de ce paragraphe se généralise naturellement aux actions des groupes de Lie connexes et unimodulaires sur des C^* -algèbres munies d'une trace invariante. Cette généralisation est à l'étude. Le cas des actions des groupes de Lie compacts a été traité par Wahl dans [91]. Très récemment, une approche similaire a été développée par Prodan dans [76], pour des actions de \mathbb{Z}^d .

Bibliographie

- [1] S. Albeverio, D. Guido, A. Ponosov and S. Scarlatti, “Singular traces and compact operators”, *J. Funct. Anal.*, **137** (1996), 281–302.
- [2] P. Aniello, “Square-integrable projective representations and square-integrable representations modulo a relatively central subgroup”, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, **3** (2006), 233–267.
- [3] S. Astashkin and K. Lykov, “Extrapolatory description for the Lorentz and Marcinkiewicz spaces close to L_∞ ”, *Siberian Math. Journal*, **47** (2006), 797–812.
- [4] A. Bechata, “Calcul pseudodifférentiel p -adique”, (French) [p -adic pseudodifferential calculus], *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **13** (2004), 179–240.
- [5] M. Benameur and T. Fack, “Type II noncommutative geometry. I. Dixmier trace in von Neumann algebras”, *Adv. Math.*, **199** (2006), 29–87.
- [6] J. Bhowmick, S. Neshveyev and A. Sangha, “Deformation of operator algebras by Borel cocycles”, *J. Funct. Anal.*, **265** (2013), 983–1001.
- [7] P. Bieliavsky, “Strict quantization of solvable symmetric spaces”, *J. Symplectic Geom.*, **1** (2002), 269–320.
- [8] P. Bieliavsky and V. Gayral, “Deformation quantization for actions of Kählerian Lie groups”, à paraître dans *Mem. Amer. Math. Soc.*, arXiv:1109.3419.
- [9] P. Bieliavsky, V. Gayral, A. de Goursac and F. Spinnler, “Harmonic analysis on homogeneous complex bounded domains and noncommutative geometry”, “Current Developments and Retrospectives in Lie Theory : Geometric and Analytical Methods” (editors : G. Mason, I. Penkov, J. A. Wolf), Springer 2014.
- [10] P. Bieliavsky and M. Massar, “Oscillatory integral formulae for left-invariant star products on a class of Lie groups”, *Lett. Math. Phys.*, **58** (2001), 115–128,
- [11] A. Bikchentaev, “On a property of L_p -spaces on semifinite von Neumann algebras”, *Mathematical Notes*, **64** (1998), 185–190.
- [12] M. Birman, L. Koplienko and M. Solomyak, “Estimates for the spectrum of the difference between fractional powers of two selfadjoint operators”, *Soviet Mathematics*, **19** (1975), 1–6.
- [13] M. Breuer, “Fredholm theories in von Neumann algebras. I”, *Math. Ann.*, **178** (1968), 243–254.
- [14] M. Breuer, “Fredholm theories in von Neumann algebras. II”, *Math. Ann.*, **180**(1969), 313–325.
- [15] F. Bruhat, “Distributions sur un groupe localement compact et applications à l’étude des représentations des groupes p -adiques”, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 43–75.

- [16] A. Carey, V. Gayral, A. Rennie and F. Sukochev, “Integration on locally compact noncommutative spaces”, *J. Funct. Anal.*, **263** (2012), 383–414.
- [17] A. Carey, V. Gayral, A. Rennie and F. Sukochev, “Index theory for locally compact noncommutative geometries”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **231** Number 1085 (2014).
- [18] A. Carey, V. Gayral, J. Phillips, A. Rennie and F. Sukochev, “Spectral flow for nonunital spectral triples”, à paraître dans *Canad. J. Math.*, arXiv:1401.1354.
- [19] A. Carey and J. Phillips, “Unbounded Fredholm modules and spectral flow”, *Canad J. Math.*, **vol. 50** (1998), 673–718.
- [20] A. Carey, J. Phillips and F. Sukochev, “Spectral Flow and Dixmier Traces”, *Adv. Math.*, **173** (2003), 68–113.
- [21] A. Carey, J. Phillips, A. Rennie and F. Sukochev, “The local index formula in semifinite von Neumann algebras I. Spectral flow”, *Adv. Math.*, **202** (2006), 451–516.
- [22] A. Carey, J. Phillips, A. Rennie and F. Sukochev, “The local index formula in semifinite von Neumann algebras II: the even case”, *Adv. Math.*, **202** (2006), 517–554.
- [23] A. Carey, J. Phillips, A. Rennie and F. Sukochev, “The Chern character of semifinite spectral triples”, *J. Noncommut. Geom.*, **2** (2008), 253–283.
- [24] A. Carey, A. Rennie, A. Sedaev and F. Sukochev, “The Dixmier trace and asymptotics of zeta functions”, *J. Funct. Anal.*, **249** (2007), 253–283.
- [25] A. Connes, “Noncommutative differential geometry”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **62** (1985), 257–360.
- [26] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Acad. Press, San Diego, 1994.
- [27] A. Connes, “Geometry from the spectral point of view”, *Lett. Math. Phys.*, **34** (1995), 203–238.
- [28] A. Connes, “On the spectral characterization of manifolds”, *J. Noncommut. Geom.*, **7** (2013), 1–82.
- [29] A. Connes and H. Moscovici, “The local index formula in noncommutative geometry”, *Geom. Funct. Anal.*, **5** (1995), 174–243.
- [30] K. De Commer, “Galois objects and cocycle twisting for locally compact quantum groups”, *J. Operator Theory*, **66** (2011), 59–106.
- [31] J. Dixmier, “Existence de traces non normales”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **262** (1966), 1107–1108.
- [32] P. Dodds, T. Dodds and B. de Pagter, “A general Markus inequality”, in *Miniconference on Operators in Analysis* (Sydney, 1989), 47–57, *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, 24, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1990.
- [33] P. Dodds, B. de Pagter, E. Semenov and F. Sukochev, “Symmetric functionals and singular traces”, *Positivity*, **2** (1998), 47–75.
- [34] V. Drinfeld, “Quasi-Hopf algebras”, *Leningrad Math. J.* **1** (1989), 1419–1457.
- [35] M. Duflo and C. Moore, “On the regular representation of a nonunimodular locally compact group,” *J. Funct. Anal.*, **21** (1976), 209–243.
- [36] B. Durhuus and V. Gayral, “The scattering problem for a noncommutative nonlinear Schrödinger equation”, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, **6** (2010).

- [37] T. Fack and H. Kosaki, “Generalised s -numbers of τ -measurable operators”, *Pacific J. Math.*, **123** (1986), 269–300.
- [38] V. Gayral, J. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücker and J. Várilly, “Moyal planes are spectral triples”, *Commun. Math. Phys.*, **246** (2004), 569–623.
- [39] V. Gayral, J. Gracia-Bondía and J. Várilly, “Fourier analysis on the affine group, quantization and noncompact Connes geometries”, *J. Noncommut. Geom.*, **2** (2008), 215–261.
- [40] V. Gayral, B. Iochum and D. Vassilevich, “Heat kernel and number theory on NC-torus”, *Commun. Math. Phys.*, **273** (2007), 415–443.
- [41] V. Gayral and D. Jondreville, “Deformation quantization for actions of \mathbb{Q}_p^d ”, *J. Funct. Anal.*, **268** (2015), 3357–3403.
- [42] V. Gayral, J. Jureit, T. Krajewski and R. Wulkenhaar, “Quantum field theory on projective modules”, *J. Noncommut. Geom.*, **1** (2007), 431–496.
- [43] V. Gayral and F. Sukochev, “Dixmier traces and extrapolation description of non-commutative Lorentz spaces”, *J. Funct. Anal.*, **266** (2014), 6256–6317.
- [44] V. Gayral and R. Wulkenhaar, “Spectral geometry of the Moyal plane with harmonic propagation”, *J. Noncommut. Geom.*, **7** (2013), 939–979.
- [45] P. Greiner, “An asymptotic expansion for the heat kernel”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **41** (1971), 163–212.
- [46] M. Gromov and B. Lawson, “Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds”, *Publications mathématiques de l’I.H.E.S.*, **58** (1983), 83–196.
- [47] D. Guido and T. Isola, “Singular traces on semifinite von Neumann algebras”, *J. Funct. Anal.*, **134** (1995), 451–485.
- [48] S. Haran, “Quantization and symbolic calculus over the p -adic numbers”, *Annales de l’Institut Fourier*, **43** (1993), 997–1053.
- [49] N. Higson, “The local index formula in noncommutative geometry”, in “Contemporary Developments in Algebraic K-Theory”, *ICTP Lecture Notes*, no. 15 (2003), 444–536.
- [50] L. Hörmander, “On the asymptotic distribution of the eigenvalues of pseudodifferential operators in \mathbb{R}^n ”, *Arkiv för Mat.*, **17** (1979), 297–313.
- [51] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [52] B. Iochum, T. Masson and A. Sitarz, “ κ -deformation, affine group and spectral triples”, in *Operator algebras and quantum groups*, 261–291, *Banach Center Publ.*, 98, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2012.
- [53] J. Kaad, R. Nest and A. Rennie, “ KK -Theory and spectral flow in von Neumann algebras”, *J. K-Theory*, **10** (2012), 241–277.
- [54] G. Kasparov, “The operator K -functor and extensions of C^* -algebras”, *Math. USSR Izv.*, **16** (1981), 513–572.
- [55] P. Kasprzak, “Rieffel deformation via crossed products”, *J. Funct. Anal.*, **257** (2009), 1288–1332.

- [56] N. Kalton, A. Sedaev and F. Sukochev, “Fully symmetric functionals on a Marcinkiewicz space are Dixmier traces”, *Adv. Math.*, **226** (2011), 3540–3549.
- [57] Y. Kordyukov, “ L^p -theory of elliptic differential operators on manifolds of bounded geometry”, *Acta Appl. Math.*, **23** (1991), 223–260.
- [58] J. Kustermans and S. Vaes, “Locally compact quantum groups”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **33** (2000), 837–934.
- [59] J. Kustermans and S. Vaes, “Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting”, *Math. Scand.*, **92** (2003), 68–92.
- [60] M. Landstad, “Quantizations arising from abelian subgroups”, *Internat. J. Math.*, **5** (1994), 897–936.
- [61] M. Landstad, “Traces on noncommutative homogeneous spaces”, *J. Funct. Anal.*, **191** (2002), 211–223.
- [62] M. Landstad and I. Raeburn, “Twisted dual-group algebras : equivariant deformations of $C_0(G)$ ” *J. Funct. Anal.*, **132** (1995), 43–85.
- [63] M. Landstad and I. Raeburn, “Equivariant deformations of homogeneous spaces”, *J. Funct. Anal.*, **148** (1997), 480–507.
- [64] H. Lawson and M. Michelson, *Spin geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.
- [65] G. Lechner and S. Waldmann, “Strict deformation quantization of locally convex algebras and modules”, arXiv :1109.5950.
- [66] J.-L. Loday, *Cyclic Homology*, 2nd Ed. 1998, Springer-Verlag.
- [67] O. Loos, *Symmetric spaces I : General Theory*, Benjamin (1969).
- [68] S. Lord, F. Sukochev and D. Zanin, *Singular traces: theory and applications*, De Gruyter Studies in Mathematics 46. Berlin, De Gruyter, 2013.
- [69] R. Meyer, “Smooth group representations on bornological vector spaces”, *Bull. Sci. math.* **128** (2004), 127–166.
- [70] S. Neshveyev and L. Tuset, “Deformation of C^* -algebras by cocycles on locally compact quantum groups”, *Adv. Math.*, **254** (2014), 454–496.
- [71] F. Nicola and L. Rodino, “Dixmier traceability for general pseudo-differential operators”, in *C^* -algebras and elliptic theory II*, Trends in Mathematics, 227–237, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [72] J. Phillips, “Self-adjoint Fredholm operators and spectral flow”, *Canad. Math. Bull.*, **39**(1996), 460–467.
- [73] J. Phillips, “Spectral flow in type I and type II factors-a new approach”, *Fields Institute Communications*, **vol. 17** (1997), 137–153.
- [74] J. Phillips and I. Raeburn, “An index theorem for Toeplitz operators with noncommutative symbol space”, *J. Funct. Anal.*, **120** (1993), 239–263.
- [75] R. Ponge, “A new short proof of the local index formula and some of its applications”, *Comm. Math. Phys.*, **241** (2003), 215–234.
- [76] E. Prodan, “Intrinsic Chern-Connes characters for crossed products by \mathbb{Z}^d ”, arXiv:1501.03479.

- [77] I. Pyateskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Translated from the Russian. Mathematics and Its Applications, Vol. **8**, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1969).
- [78] A. Rennie, “Smoothness and locality for nonunital spectral triples”, *K-Theory* **28** (2003), 127–165.
- [79] M. Rieffel, “Proper actions of groups on C^* -algebras”, in *Mappings of operator algebras* (Philadelphia, PA, 1988), 141–182, Progr. Math., **84**, Birkhäuser Boston, Boston (1990).
- [80] M. Rieffel, “Deformation quantization for actions of \mathbb{R}^d ”, Mem. Amer. Math. Soc., **106** (1993).
- [81] M. Rieffel, “ K -groups of C^* -algebras deformed by actions of \mathbb{R}^d ”, J. Funct. Anal., **116** (1993), 199–214.
- [82] M. Rieffel, “Non-compact quantum groups associated with abelian subgroups”, Commun. Math. Phys., **171** (1995), 181–201.
- [83] I. Segal, “Transforms for operators and symplectic automorphisms over a locally compact Abelian group”, Math. Scand. **13** (1963), 31–43.
- [84] L. Schweitzer, “Dense m -convex Fréchet subalgebras of operator algebra crossed products by Lie groups”, Int. J. Math., **4** (1993), 601–673.
- [85] M. Shubin, “Spectral theory of elliptic operators on noncompact manifold”, Méthodes semi-classiques, Vol. 1 (Nantes, 1991). Astérisque, **207** (1992), 35–108.
- [86] B. Simon, *Trace Ideal and Their Applications*, second edition, Math. Surveys Monogr., vol. 12, AMS, 2005.
- [87] F. Sukochev, A. Usachev and D. Zanin, “Dixmier traces generated by exponentiation invariant generalized limits”, J. Noncommut. Geom., **8** (2014), 321–336.
- [88] F. Sukochev and D. Zanin, “ ζ -function and heat kernel formulae”, J. Funct. Anal., **260** (2011), 2451–2482.
- [89] A. Unterberger, “The calculus of pseudodifferential operators of Fuchs type”, Comm. Partial Differential Equations, **9** (1984), 1179–1236.
- [90] A. Unterberger, *Pseudodifferential analysis, automorphic distributions in the plane and modular forms*, Birkhauser Springer, Basel, (2011).
- [91] C. Wahl, “Index theory for actions of compact Lie groups on C^* -algebras”, J. Operator Theory, **63** (2010), 217–242.
- [92] A. Weil, “Sur certains groupes d’opérateurs unitaires”, Acta Math. **111** (1964), 143–211.